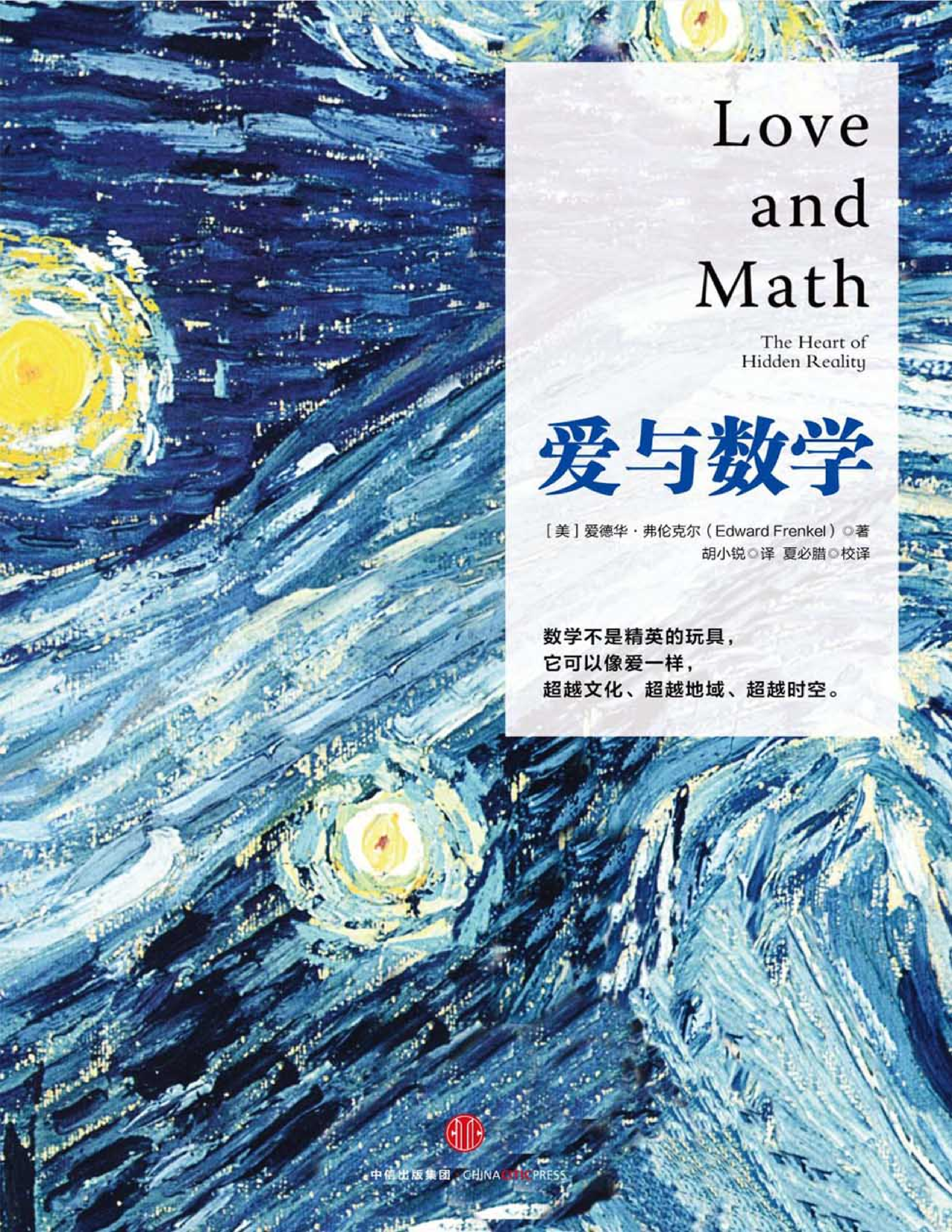


Love and Math

The Heart of Hidden Reality

爱与数学

[美] 爱德华·弗伦克尔（Edward Frenkel）◎著
胡小锐◎译 夏必腊◎校译

数学不是精英的玩具，
它可以像爱一样，
超越文化、超越地域、超越时空。

中信出版集团 | CHINA CITIC PRESS

版权信息

书名:爱与数学

作者:爱德华·弗伦克尔

ISBN:9787508658070

中信出版集团制作发行

本书献给我的父母

序言

在我们身边，有一个存在于平行时空中的秘密世界。她风姿绰约、精致典雅，与我们生活的这个世界有着千丝万缕的联系。这个秘密世界，就是我们大多数人都无法看见的数学世界。本书意在邀请广大读者一起发现、探索这个世界。

我们经常会遇到这样一个悖论。一方面，数学与我们日常生活的方方面面紧密地交织在一起。只要我们上网购物，发送一条文本信息，在互联网上搜索信息，或者使用GPS（全球定位系统）设备，我们就会用到数学公式和运算法则。另一方面，大多数人在学习数学时却感到头疼不已。用诗人汉斯·马格努斯·恩岑斯贝格尔（Hans Magnus Enzensberger）的话说，数学已经成为“我们文化中的一个盲点，是一片陌生的领土，只有为数不多的精英在名师的指点下才能占据制高点”。他曾说，在我们认识的人中，几乎没有人“会气急败坏地抱怨：只要在他们面前提起读小说、看照片或者观看电影这些事，他们就会心惊肉跳，甚至痛不欲生”。但是，即使是“受过良好教育的聪明人”也常常以“一种不屑一顾与自以为是的口吻”说着数学“纯粹是折磨人”，是“一场噩梦”之类的话。因此，他们“不喜欢数学”。

为什么会有这种反常现象呢？我认为主要有两个原因。首先，数学比其他学科更抽象，因此令人难以理解。其次，我们在学校学到的只不过是数学知识的冰山一角，而且这些课本内容大多还是很久以前的陈芝麻烂谷子。多年以来，数学已经取得了长足的发展。然而，虽然现代数学的宝库中珍藏着琳琅满目的瑰宝，但我们一直不得其门而入。

如果学校在我们必修的“美术课”上只教给我们粉刷篱笆的方法，却从来不向我们展示达·芬奇（Leonardo da Vinci）与毕加索（Picasso）的作品，那么大家会有什么样的感觉呢？这样做能提高艺术鉴赏力吗？你还会有继续学习的欲望吗？我想答案是否定的。你可能会说：“在学校里学习绘画就是浪费时间。如果非要粉刷篱笆不可，我完全可以雇人去做啊。”当然，这样的教学太荒谬了。但是，学校就是这样教授数学的。因此，在大多数人眼中，学习数学毫无意义，就像在篱笆旁边坐等油漆干透。想要看到美术大师们的画作并不那么困难，但是数学大师们的研究成果却通常被束之高阁。

不过，数学之所以如此迷人，并不仅仅是因为它能给人以美的享受。伽利略（Galileo Galilei）说得非常好：“自然界的法则是用数学语言写就的。”数学是一种描述现实、揭示世界运行规律的语言，这种普适性语言已经成为检验真理的黄金标准。在我们生活的这个世界里，数学在科技的驱动之下，已经成为人类力量、财富与进步的源泉，并且在不断巩固其地位。因此，能熟练掌握这门“新”语言的人必将站在社会发展的最前沿。

人们通常对数学有所误解，以为数学不过是一个“工具包”。比如，生物学研究人员在完成实地调查并收集好数据之后，往往会专门为这些数据建立一个数学模型（有时，他们还会向数学领域的专业人士求助）。尽管这种研究模式也非常重要，但是数学的作用远不止于此。数学可以帮助我们实现利用其他知识无法做到的创新性、颠覆性飞跃。例如，当爱因斯坦（Albert Einstein）发现万有引力会导致我们所处的空间弯曲时，他并没有尝试把所涉及的任何数据归纳成方程式。事实上，他甚至没有任何数据可以证明他的这个发现。当时，人们根本无法想象自己所处的空间竟然是弯曲的，大家都“觉得”这个世界是平的。但是，爱因斯坦知道，要想成功地把狭义相对论与他得出的一个深刻认识（即万有引力与加速度会产生相同的效果）一起推广至非惯性系统，建立方程式是唯一可行的方法。用方程式来表现数据

的规律，即便在数学领域也属于层次较高的学术活动。50年前，爱因斯坦借助数学家伯恩哈德·黎曼（Bernhard Riemann）的研究成果才完成了这项工作。人类大脑的构造决定了我们无法想象维数大于二的弯曲空间，我们只能借助数学才能理解复杂的空间。爱因斯坦的观点是正确的：我们这个宇宙的确是弯曲的空间，而且它还在不断膨胀。这个例子充分说明了数学的重要作用。

这样的例子俯拾即是，不仅在物理学中存在，在其他科学领域也不少（下文将讨论其中一些例子）。历史事实表明，数学思想正在促使科学和技术发生日新月异的变化。即使是那些一开始时被人们视为深奥难懂的纯理论性数学知识，后来也会在实际生活中发挥不可或缺的作用。查尔斯·达尔文（Charles Darwin）最初的研究并不依赖于数学，但是他后来在自传中说："我为自己不能对数学中的重要原理有所领悟而深感遗憾，因为这些原理能增强人的理性思维能力。"我觉得他的这番话就是一个颇有预见性的建议，告诫后人必须充分发掘数学的巨大潜能。

小时候，我并不知道身边还有数学这个秘密世界。同大多数人一样，我也以为数学是一门枯燥无味的学科。不过，我比较幸运，在中学阶段的最后一个学年，一位专业素养极高的数学专业人士帮我打开了数学这一神秘世界的大门。我这才知道，数学不仅典雅美好，而且它还像诗歌、艺术和音乐一样，充满了无限可能。于是，我深深地迷上了数学。

亲爱的读者，我撰写本书就是为了把老师们对我的言传身教传递给你们，向你们展示数学的力量和美，帮助你们进入这个神奇的世界，即便你们从来没想过"数学"与"爱"这两个词竟然可以并列在一起。你们将会和我一样，发现数学可以触及我们的灵魂，使我们的世界观发生天翻地覆的变化。

* * *

数学知识与其他学科知识都有所不同，它极为特殊。我们对物理世界的认知很容易失真，但对数学真理的认知却一成不变。数学真理是经久不变、客观且必然的存在。对所有人而言，无论他们的性别、宗教信仰或者肤色有何不同，无论他们身处何地，同一个数学公式或者定理的含义都不会有任何不同，即便经历上千年也不会发生变化。同时，数学公式和定理是我们所有人的共有财产，任何人都不可以对它们申请专利。在这个世界上，如此深奥、精致，而且所有人都可以随时取用的东西，非数学知识莫属。这样一个知识宝库的存在令人难以置信，它具有非凡的价值。而且，它并非那些“受过良好教育的少数人”的专利，而是人类的共同财产。

数学的一个主要作用是对信息进行排序，信息的排序分类是梵高的画作区别于随意涂鸦的根本原因。随着3D打印技术的出现，我们习以为常的现实正在发生着根本性的改变。一切事物都不再属于物理对象的范畴，而是隶属于信息与数据的范畴。我们随时可以把PDF（便携式文档格式）文档转变成书本，把MP3（一种能播放音乐文件的播放器）文件转换成一段乐曲，同样，在不久的将来，我们还可以根据需要，利用3D打印机，方便地把信息转变成实物。在这个新世界中，数学将大有可为，发挥更加重要的作用。我们可以利用数学知识对信息进行整理、排序，也可以将信息转变成物理现实。

在本书中，我将向大家介绍数学界近50年来的一个重要思想：“朗兰兹纲领”（Langlands Program）。很多人认为朗兰兹纲领是数学中的“大统一理论”（the Grand Unified Theory）。代数、几何、数论、分析与量子物理等领域的研究内容乍一看似乎相去甚远，但是朗兰兹纲领却在这些不同的数学分支之间建立起千丝万缕的联系。如果我们把这些分支看成数学这个秘密世界中的一块块大陆，朗兰兹纲领就是功能强大的运输工具，可以让我们在各个大陆之间瞬时往返。

朗兰兹纲领是数学家罗伯特·朗兰兹（Robert Langlands）于20世纪60年代后期提出的一个数学理论（朗兰兹现在在普林斯顿高等研究院工作，他使用的办公室就是当年爱因斯坦用过的），它本质上是一个关于对称的开创性数学理论，而对称理论的雏形则要追溯至200年前，那是一个年仅20岁的法国天才在死亡决斗前夜完成的研究成果。随后，一个令人瞠目结舌的发现丰富了这位天才的研究成果，它不仅帮助人们完成了“费马大定理”（Fermat’s Last Theorem）的证明，而且颠覆了人们对数字与方程式的认知。接着，人们又有了一个极为精辟的洞见，即数学有自己的“罗塞塔石碑”（Rosetta Stone）——在数学领域里充满了各种神秘的类比与隐喻。这些类比仿佛是数学这片魔幻土地上的一条条小溪，将朗兰兹纲领分成几何与量子物理两大领域，使原先杂乱无章的世界呈现出井然有序与和谐统一的特点。

我告诉大家这些内容，意在展示数学鲜为人知的其他方面，包括灵感、深刻的思想和惊人的发现。数学打开了一扇门，让我们了解如何打破传统的壁垒，如何在追求真理的过程中充分发挥想象力。无穷理论的创立人格奥尔格·康托尔（George Cantor）说：“数学的精义在于蕴藏其中的自由。”数学教我们大胆分析现实，研究事实，并以事实为指引义无反顾地朝前迈进。数学把我们从教条与偏见中解放出来，并帮助我们培养创新突破的能力。正因为这些，数学才得以代代相传，延续至今。

由于数学中的这些工具既可以产生积极向上的结果，也可能被用于行凶作恶，因此，我们必须认真考虑数学对现实世界的影响。例如，全球经济危机之所以爆发并造成严重危害，在很大程度上是由于在全球金融市场中普遍存在对数学模型使用不当的问题。很多决策者，由于其数学知识的贫乏，并不能真正理解这些数学模型，但是，在贪欲的驱使之下，他们仍然冒险使用了这些数学模型，最终导致整个金融体系受到重创。他们肆意利用信息的不对称性，丝毫不担心自己的谎言会被戳穿，因为人们一般也不会去了解这些数学模型的作用

原理。因此，如果有更多的人能了解这些数学模型与金融体系的运作机制，也许我们就不会被愚弄那么长时间了。

我再举一例。1996年，美国政府组织任命的一个委员会举行了一次秘密碰头会，修改了消费者物价指数（CPI）中的一个公式。消费者物价指数通过测算通胀率来确定税级、社会保障、医疗保健及其他与公民生活指数挂钩的款项。因为这个公式被修改，成千上万的美国公民都受到了影响，但是公众却几乎没有讨论过这个新公式及其造成的后果。最近，又有人试图把这个神秘公式当作美国经济的后门加以利用。

如果每个人都能熟练掌握一定的数学知识，那么这类幕后交易将会少得多。数学就等于严谨加上学术诚信再乘以事实准绳。我们必须通过数学来不断推动社会进步，促使更多的人掌握数学知识与数学工具，以保护自身的权益免受少数当权者的肆意践踏。没有数学，就没有自由。

* * *

数学与艺术、文学和音乐一样，是我们文化遗产的一部分。人类总是渴求发现新事物，掌握它们的新意义，以便更好地了解宇宙以及我们在其中所处的位置。我们无法像哥伦布（Christopher Columbus）那样再发现一块新大陆，也不可能成为第一个踏上月球的人，这的确令人遗憾。但是，如果我告诉你，我们不必越洋远航，也不必飞越太空，就能发现世界奇观，你相信吗？世界奇观就在我们身边，与现实交织在一起，从某种意义上讲，它就埋藏在我们内心深处。数学指引着宇宙的运行，隐藏在各种形状与曲线背后，掌控着小到原子、大到一颗颗恒星的世间万物。

本书意在鼓励读者探索内涵丰富、五彩斑斓的数学世界，特别是那些没接受过专业数学教育的读者。如果你觉得数学太难，无法理

解；或者如果你害怕数学，同时又希望了解数学是否值得你为之努力，那么，本书非常适合你。

人们常常以为，只有经过多年苦苦钻研，才能认识到数学的全部价值。这显然是错误的。有些人甚至认为，大多数人天生就学不会数学。我并不赞成这个观点。我们中的大多数人即使没有学过物理学和生物学的相关课程，却也听说过太阳系、原子及基本粒子、DNA（脱氧核糖核酸）双螺旋结构等概念，甚至还对这些概念的含义有初步的了解。人们很自然地认为这些复杂的概念是我们文化的一部分，也就是我们集体意识的一部分。同样，如果对数学中的重要概念与思想解释得当，那么，大家无须耗费几年的时间辛苦学习数学，也能顺利掌握这些概念与思想。在很多情况下，我们可以略过烦琐的中间步骤，直奔主题。

问题在于，几乎每个人都在谈论星球、原子和DNA等内容，但可能没有人会告诉你现代数学中的某些概念有多么引人入胜。比如，现代数学中有对称群，也有告诉你2加2不一定等于4的新型数字系统，还有“黎曼曲面”（Riemann Surface）等美丽动人的几何图形。人们在介绍数学的时候，就像指着一只小猫对你说老虎就是这个样子的。但是，老虎与猫根本不是一回事儿。我要在书中向大家展现数学美妙绝伦的一面，用威廉·布莱克[注]的话说，就是要让大家领略到“对称中令人震撼的美”。

大家不要误解，我并不是说阅读本书就能让你成为一名专业的数学研究人员。而且，我也不提倡全民学数学。我们可以这样想：在学会一两个和弦之后，我们就可以用吉他弹奏好几首歌了。你不会因此成为世界上最优秀的吉他手，但你的生活却变得更加丰富多彩了。我在本书中教给大家的就是现代数学中的“和弦”。我保证，当你学会这些你以前没有接触过的“和弦”之后，你的生活肯定会变得更加丰富多彩。

我的一位老师伊斯雷尔·盖尔范德（Israel Gelfand）经常说：“人们觉得他们无法理解数学，其实关键在于你是怎么向他们解释数学知识的。如果你问一位醉汉：2/3和3/5哪个大？他肯定答不上来。但是，如果你换一种问法：三个人分两瓶伏特加，和五个人分三瓶伏特加，哪一种方案更好？他会毫不犹豫地告诉你：当然是三个人分两瓶伏特加更好。”

我的目标就是用大家易于理解的语言向大家解释数学这门学科。

我还会穿插介绍我在苏联的成长经历。由于苏联特殊的政治政策，我无法进入莫斯科大学学习，数学研究的大门在我面前“砰”的一声关上了。但是，我没有因此放弃学习数学。我偷偷溜进莫斯科大学听课，我还找了一些数学方面的书籍阅读，有时甚至会读到深夜。只要有爱，还有什么可以阻止你呢？

随后，两位杰出的数学家接纳了我，他们成为我的导师。在他们的指引下，我开始了数学研究工作。当时，我还是一名大学生，但是我已经在不懈地探索未知领域了。这是我一生中最难忘的一段时光，尽管当时的政策不允许我在毕业后继续从事数学研究工作。

然而，奇迹出现了。我将自己完成的几篇数学论文偷偷地寄到了国外，结果引起了学术圈的关注，我在21岁时收到了赴哈佛大学担任客座教授的邀请。因此，我变成了一个没有博士学位的哈佛教授。随后，我继续在学术征程上前进，开始研究朗兰兹纲领。在过去20年里，我参与的一些朗兰兹纲领的研究活动取得了重大突破。在本书中，我将描述杰出数学家们的显著成果以及一些逸事。

* * *

本书的另一个主题是爱。有一次，我发挥了数学家的想象力，发现了“爱的公式”。后来我受到这个爱的公式的启发，拍摄了一部电影

——《爱与数学之祭》（*Rites of Love and Math*，我将在本书的后续章节中做详细介绍）。每次我播放这部电影时，总有人问我：“真的有爱的公式吗？”

我回答道：“我们发现的所有公式都是爱的公式。”数学不断为我们贡献永恒而深奥的知识，直接触及所有事物的本质，跨越文化、大陆与历史的障碍，将我们所有人联系在一起。我的梦想是让所有人都能看到这些数学思想、公式和方程式中蕴含的美，都能体会其价值，并为之惊叹不已。这样，我们对世界的爱、我们彼此之间的爱，都将更加丰富、更有内涵。

---

1. 威廉·布莱克（William Blake），英国第一位重要的浪漫主义诗人、版画家，英国文学史上最重要的伟大诗人之一，虔诚的基督教徒。主要诗作有诗集《纯真之歌》《经验之歌》等。早期作品简洁明快，中后期作品趋向玄妙深沉，充满神秘色彩。

导言

在撰写本书时，我尽量使用最基本、最直观的方式来解释每一个数学概念。不过，我发现本书的某些章节涉及的数学知识比较深奥（尤其是第8章、第14章、第15章和第17章的部分内容）。如果大家在第一次阅读时觉得本书的某些内容难以理解或者十分烦琐，完全可以跳过这些内容（我也经常以这样的方式阅读）。在读完第一遍、掌握了一些新知识之后，再回过头来阅读这些部分，你可能会觉得理解起来要容易一些。而且，跳过这些部分并不影响你对后续内容的理解。

也许我更应该提醒大家的是，某些内容一时看不懂其实无伤大雅。我在从事数学研究时，有90%的时间会有不甚明白的感觉，所以，不必紧张，欢迎来到我的世界。困惑（有时甚至是挫败感）是数学研究的一个必不可少的组成部分。不过，我们要看到积极的一面：如果生活中的一切都无须费力便可理解，那样的生活将会多么无聊！数学研究之所以如此令人兴奋，其原因就在于我们渴望解开这种困惑。我们希望理解自己所研究的内容，希望能够揭开数学神秘的面纱。在真正理解之后，我们内心深处会充满成功的喜悦，此时，你会觉得你所付出的一切都很值得。

在本书当中，我关注的是广阔的图景和不同概念及不同数学分支之间的逻辑关系，而不是技术细节。

我尽量减少使用公式，只要有可能，我都选择用语言来解释。关于书中出现的那几个公式，大家在阅读时也可以跳过不读。

关于数学术语，我需要提醒大家注意一个问题。在撰写本书时，我惊讶地发现，在数学学科中使用的某些特定表达，若在其他情况下

使用，有可能意思完全不同。例如，数学中使用的“对应”（corresponding）、“表示”（representation）、“结合”（composition）、“圈”（loop）、“流形”（manifold）、“理论”（theory）等术语就与其在日常语境中的意义不同。只要有这种情况出现，我都会做出解释。此外，只要有可能，我都会用意义明晰的数学术语来替代意义模糊的术语，例如，我用“朗兰兹关系”代替了“朗兰兹对应”。

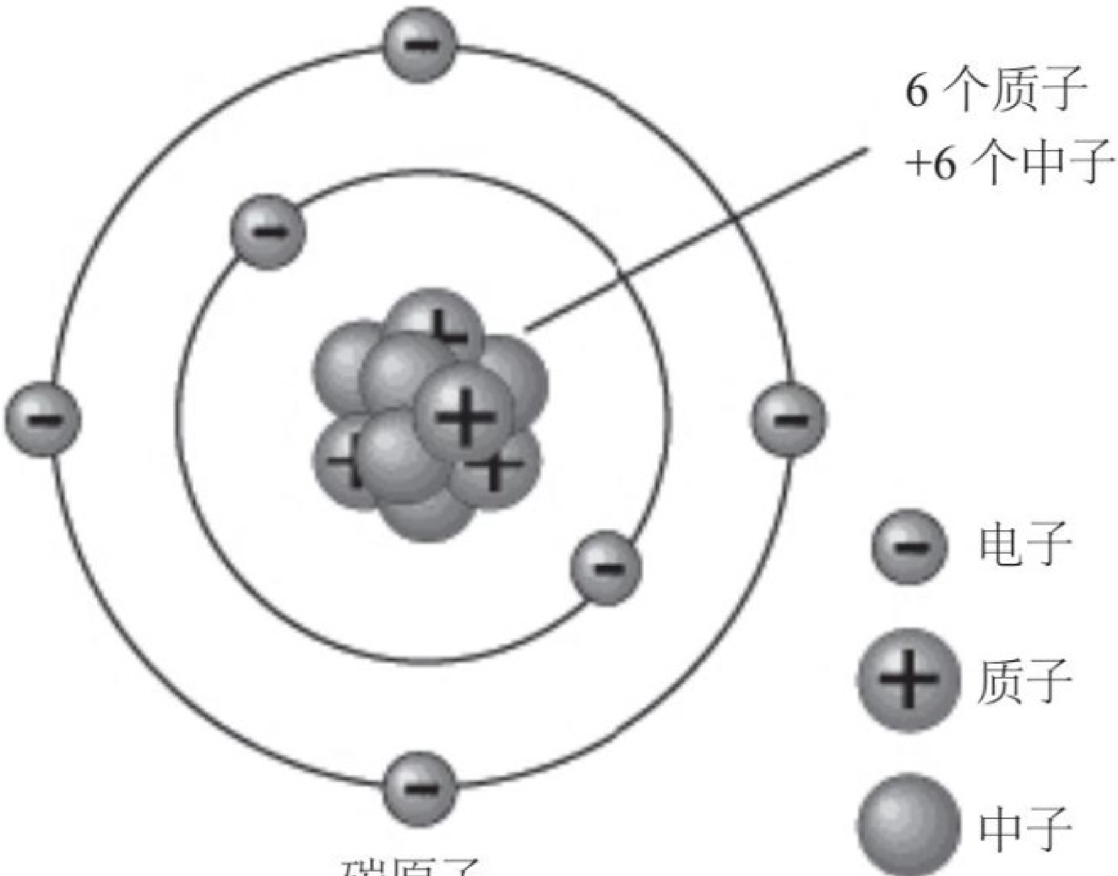
大家可以登录我的个人网页http://edwardfrenkel.com，查阅我更新的信息及上传的阅读辅助材料。

第 1 章
神秘的怪兽

怎样才能成为一个数学研究者呢？我觉得方法多种多样，下面我就与大家分享一下我的经历。

其实，在上学时我讨厌数学，这个情况可能出乎你的意料。“讨厌”这个说法也许有点儿夸张，但至少当时我不喜欢数学。在我看来，数学太枯燥了，虽然学数学对我而言并不难，不过我真的不明白为什么要学数学。在课堂上学习的那些东西似乎毫无意义，也看不出有什么实际用途。而且，我还以为学校教给我们的这些就是数学的全部内容了。我真正感兴趣的学科是物理，特别是量子物理。只要有机会，我就会如饥似渴地阅读物理方面的科普读物。我是在俄罗斯长大的，在俄罗斯找到这类书并不太难。

量子世界真是让我心旷神怡！自古以来，科学家和哲学家就有一个梦想，希望能描述宇宙的本质。有人甚至还提出假说，猜测所有物质都是由一种叫作原子的微小成分构成的。20世纪纪初，人们证明原子确实存在。但几乎在同一时间，科学家发现，每个原子还可以再分解。原来，原子都是由位于其中心的原子核和围绕原子核旋转的电子构成的，而原子核又是由质子和中子构成的。这种结构可以用下面这幅图来表示：



碳原子

那么，质子、中子和电子又是由什么构成的？结果，我在那些科普读物中找到了答案：它们都是由“夸克”（quark）这种基本粒子构成的。

我非常喜欢“夸克”这个名字，特别是这个名字的由来。首先提出这个概念的物理学家默里·盖尔曼（Murray Gell-Mann）是从詹姆斯·乔伊斯（James Joyce）的小说《芬尼根的守灵夜》（*Finnegans Wake*）中借用了这个名字。在那部小说里，有这样一首模仿诗：

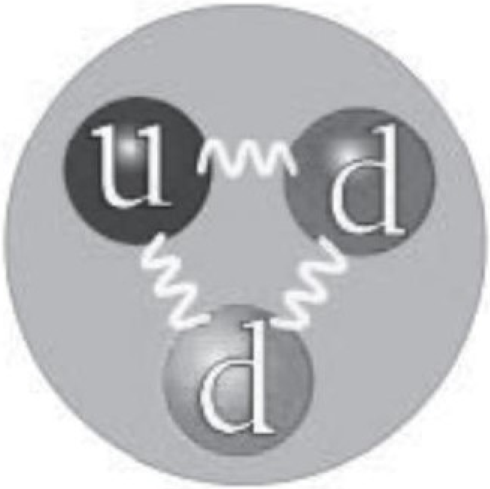
冲马克先生叫三声夸克！

他肯定没有从叫喊声中听到什么，

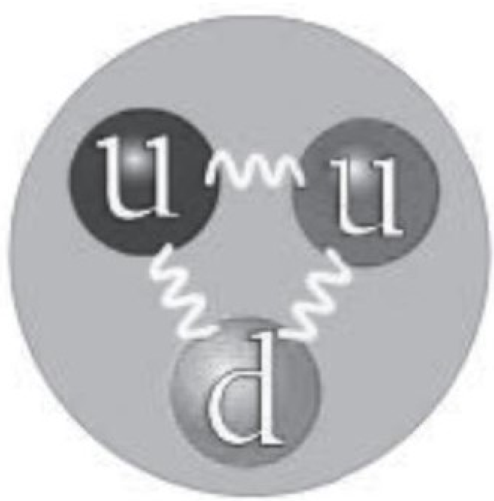
因为他听到的都是毫不相干的内容。

一位物理学家在考虑为一种粒子命名时，竟然从小说中寻找灵感，而且还是《芬尼根的守灵夜》这样一部异常复杂的巨著。我觉得这实在是太特别了。当时，我大约13岁。在我看来，科学家都是不谙世事的怪物。他们离群索居，埋头钻研，对诸如人文艺术等生活的其他方面没有丝毫兴趣。而我的生活却不是这样。我有很多朋友，我喜欢阅读，我不仅对自然科学感兴趣，还有很多其他爱好。我爱踢足球，经常跟朋友们在球场上纵情奔跑，一踢就是好几个小时。在我为“夸克”着迷的同时，我还第一次感受到了印象派绘画的魅力（父亲的藏书中有一本介绍印象派的大部头，它为我打开了这扇迷人的窗户），甚至还拿起画笔亲自尝试了一番。正是因为我的爱好很多，所以此前我一直怀疑自己可能并不适合成为一名科学家。然而，当看到盖尔曼这位伟大的物理学家、诺贝尔奖得主，竟然也兴趣广泛（不仅对文学，还对语言学、建筑等领域感兴趣），我非常开心。

盖尔曼认为，夸克有两种不同类型，即“上夸克”（up，下图中表示为u）和“下夸克”（down，下图中表示为d）。如果两种类型的夸克以不同的比例混合在一起，其构成的中子和质子就具有不同的特性。如下图所示，中子由两个下夸克和一个上夸克构成，而质子则由两个上夸克和一个下夸克构成。



中子



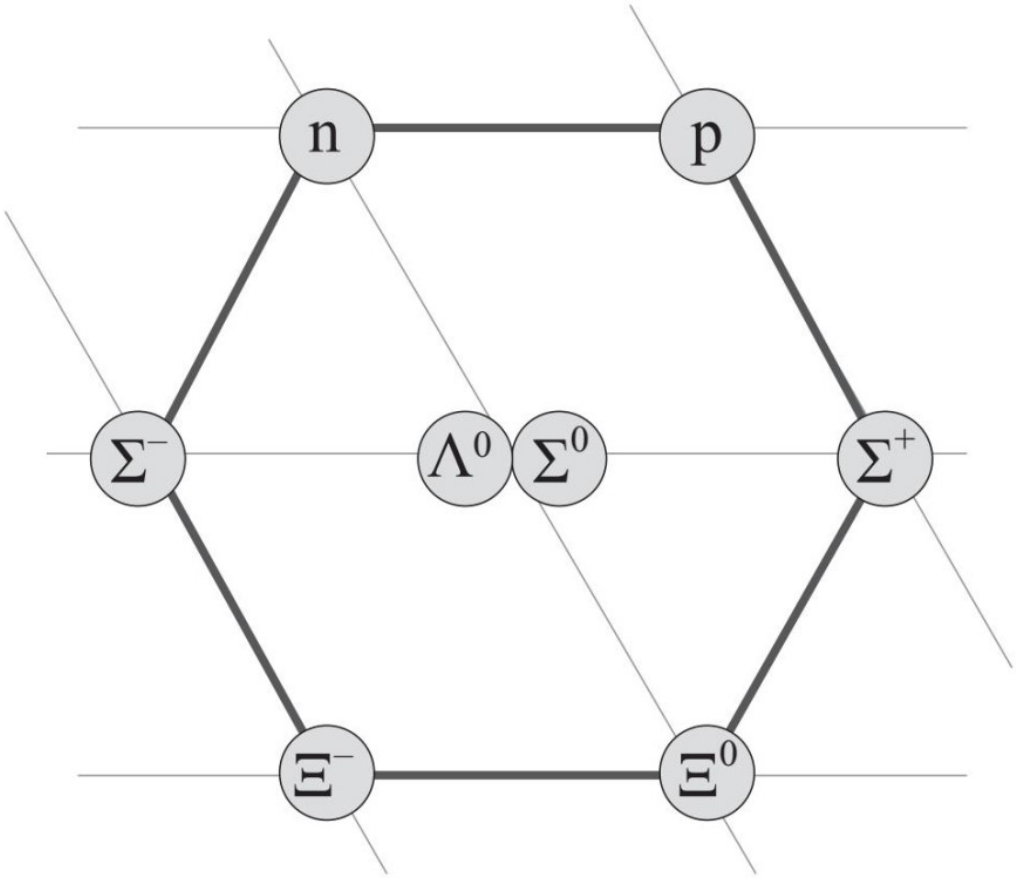
质子

这个理论猜测质子与中子并非一个个不可见的粒子，而是由更小的块状结构堆砌而成的。理论本身虽然没有一点儿含糊之处，但是物理学家是如何促使这一理论形成的，人们却并不清楚。

事情的缘起要追溯到20世纪50年代末。当时，人们发现了大量明显是基础粒子的强子。中子与质子都是强子，它们作为构成物质的“砖石”，在日常生活中自然起到了非常重要的作用。至于其他强子，却没有人清楚其存在的意义。（一位研究人员说：“是谁为这些强子分类排序的呢？”）强子的种类非常多，就连沃尔夫冈·泡利（Wolfgang Pauli）这位颇具影响力的物理学家也开玩笑说，物理学都要变成植物学了。为了探寻强子发生变化的基本原理，解释强子疯狂裂变的根本原因，物理学家们迫切地需要掌控住这些强子。

盖尔曼与尤瓦勒·内埃曼（Yuval Na’eman）各自提出了一种新颖的分类方案。在他们的方案中，他们都认为强子可以自然地分裂成更小的族系，每个族系由8个或10个粒子构成，分别称作“八重态”和“十重态”。在这些族系中，所有的粒子都具有相似的属性。

在我当时阅读的那些科普读物中，著者用下图来表示八重态的结构：



在这幅图中，质子被记作p，中子被记作n，另外还有6个粒子，它们各有一个奇怪的名字，都用希腊字母表示。

为什么每个族系中的粒子数目都是8个或10个，而不是7个或11个呢？我在那些书里没有找到统一的合乎逻辑的解释。虽然书中都提到一个由盖尔曼提出的神秘理论，名为“八重道”（暗指佛教中的“八正道”），但却根本没有解释该理论到底讲的是什么。

由于缺少解释，我反而被激起了更强的好奇心。该理论的关键部分到底是什么不得而知，因此，我希望解开这个谜，但却无从下手。

幸运的是，我家人的一位朋友伸出了援助之手。我是在一个名叫科诺姆纳的工业小镇长大的。小镇有15万人口，离莫斯科大约70英里（约为112.654公里），乘火车大约需要两个小时。我的父母是工程师，在一家制造重型机械的大企业工作。科诺姆纳位于两条河流的交汇处，是一座古老的小镇，建于1177年，比莫斯科的建成仅晚了30年。科诺姆纳现在仍有几座保存完好的教堂，与旧城墙一起，见证了小镇的历史。但是，这个小镇谈不上教育与学术中心，只有一所规模不大的大学，为当地学校培养老师。但是，这所大学里有一位名叫叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇·彼得罗夫（Evgeny Evgenievich Petrov）的教授，他是我父母的好朋友。一天，我母亲在街上遇到了这位教授。因为很长时间没见面，他们就交谈起来。母亲喜欢与她的朋友谈论我的事情，当叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇听说我对科学感兴趣时，他说："我得见见他，我想让他把兴趣转到数学上来。"

"哦，不行啊，"母亲说，"他觉得数学很枯燥，所以不喜欢数学。他希望学习量子物理。"

"不用着急，"教授说，"我有办法让他改变主意。"

于是，他们就安排了我们的见面。虽然我对这次见面并不是非常热心，但我还是去了他的办公室，见到了叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇。

那时候，我快满15岁了，正在读九年级，即将升入高中。（我跳过一级，比同班同学小一岁。）叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇当时40岁出头，非常友好，也没什么架子。他戴着一副眼镜，满脸胡茬儿，与我心中的数学家形象没什么两样。但是，他的眼睛很大，看人时目光锐利，仿佛他对周围所有的事物都充满了好奇心，这让我觉得他颇有几分魅力。

事后看来，叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇确实有好办法，可以让我把兴趣转移到数学上。我一进他的办公室，他就问我："我听说你喜欢量

子物理，对吗？那你听说过盖尔曼的八重道与夸克模型吗？”

“是的，我在几本科普读物中读到过。”

“但是你知道他建立这个模型的基础是什么吗？盖尔曼又是怎么想到这些的呢？”

“这个……”

“你听说过SU(3)群吗？”

“SU……什么？”

“如果你不知道SU(3)群，怎么可能理解夸克模型呢？”

彼得罗夫教授从书架上取下几本书，打开后，让我浏览了几页。上面满是各种各样的公式，我看到了熟悉的八重态图，就像前文提到的那幅图一样。但是，这些图中并不只有一个个漂亮的图形，旁边似乎还有合乎逻辑的详细解释。

虽然这些公式让我有点儿摸不着头脑，但是我立刻明白过来，这些公式不就是我一直在苦苦寻找的答案吗？这一刻，我看着这些公式，听着教授的话，仿佛被催眠了一样。我的心中突然产生了一种前所未有的悸动。这种感觉无法用语言形容，但是我能感觉到那股冲击力，就像听到一段让人无法忘却的美妙音乐、看到一幅空前绝后的画作时那样激动。我彻底被征服了，心里不禁惊叹一声：哇！

“你可能以为学校教的那些东西就是数学吧？”叶夫根尼耶维奇摇了摇头，他指着书中的公式说，“你错了，这些才是数学。如果你真的想要了解量子物理，就应该从这里开始。盖尔曼用美妙的数学理论证明了夸克的存在，事实上它应当是数学领域的一个发现。”

“但是我怎么才能学会这些东西呢？”

这些公式之类的东西看上去深奥得吓人。

“别着急，你首先要学习‘对称群’的概念。对称群非常重要，理论物理与数学的大部分内容都建立在对称群的基础之上。我希望你能读一读这几本书，你现在就可以开始阅读，遇到不懂的地方，做个标记。我们每周在这里见面，讨论你读过的内容。”

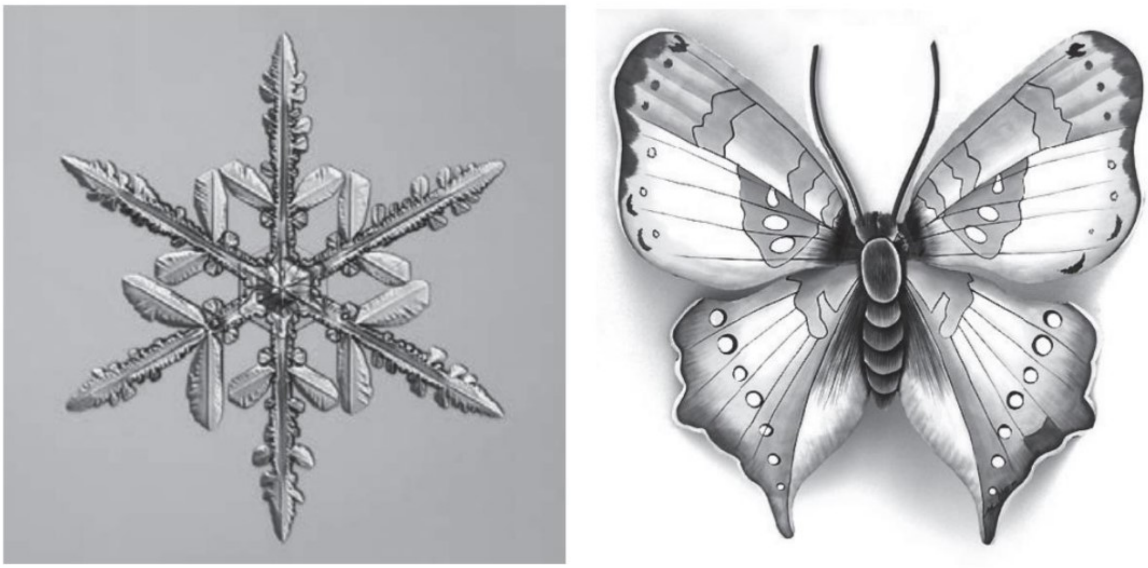
他递给我几本书。其中一本介绍了对称群，另外几本涉及不同的内容，包括*p*进数（与我们习惯的数字体系截然不同的一套数字）与拓扑学（几何图形最基本特征的研究）。叶夫根尼耶维奇的眼光极为精准，他挑选的这几本书，可以帮助我从不同侧面去了解数学这头神秘的怪兽，并对它产生浓厚的兴趣。

我们在学校学过二次方程式，也学过一点儿微积分知识，还学过欧几里得几何学的基础知识和三角学。我一直以为，数学的核心内容无非就是这些，可能有一些更加复杂的难题，但都不会跳出我熟悉的这个总体框架。但是，叶夫根尼耶维奇给我的这几本书，却让我窥探到一个截然不同的数学世界，一个完全超乎我想象的数学世界。

我的兴趣几乎瞬间就被转移到数学上了。

第 2 章
对称的奥秘

大多数人认为，数学研究的就是数字，从事数学研究的人整天都在处理一些大数字，甚至是一些超级大的数字，而且所有数字都会有稀奇古怪的名称。至少在叶夫根尼耶维奇向我介绍现代数学的那些概念和想法之前，我也是这样以为的。事实上，在那些概念与想法中，就藏有一把帮助人们打开夸克理论大门的钥匙——对称（symmetry）概念。



图片来源：K·G·利布雷希特（K. G. Libbrecht）

对称是什么？我们每个人对这个概念都有一个直观的理解，看到某个图形就可以知道它是否对称。当我要求人们给出一个对称物体的例子时，他们总以蝴蝶、雪花为例，或者认为人体就是对称的。

但是，当我问他们在什么情况下我们会说一个物体是对称的时候，他们却语焉不详。

对于这个问题，叶夫根尼耶维奇是这样给我解释的。“让我们来看看这张圆桌，还有这张方桌，”他指着办公室里的两张桌子问道，“哪张桌子更加对称呢？”

“当然是圆桌，这不是显而易见的吗？”

“为什么？数学研究可不能因为答案‘显而易见’就视其为正确答案啊，你必须使用推理的方法。通过推理，你常常会惊讶地发现，最显而易见的答案竟然是错误的。”

看到我一脸迷惑的样子，叶夫根尼耶维奇给了我一点儿提示：“如果说圆桌更加对称，那是因为圆桌具有哪些属性呢？”

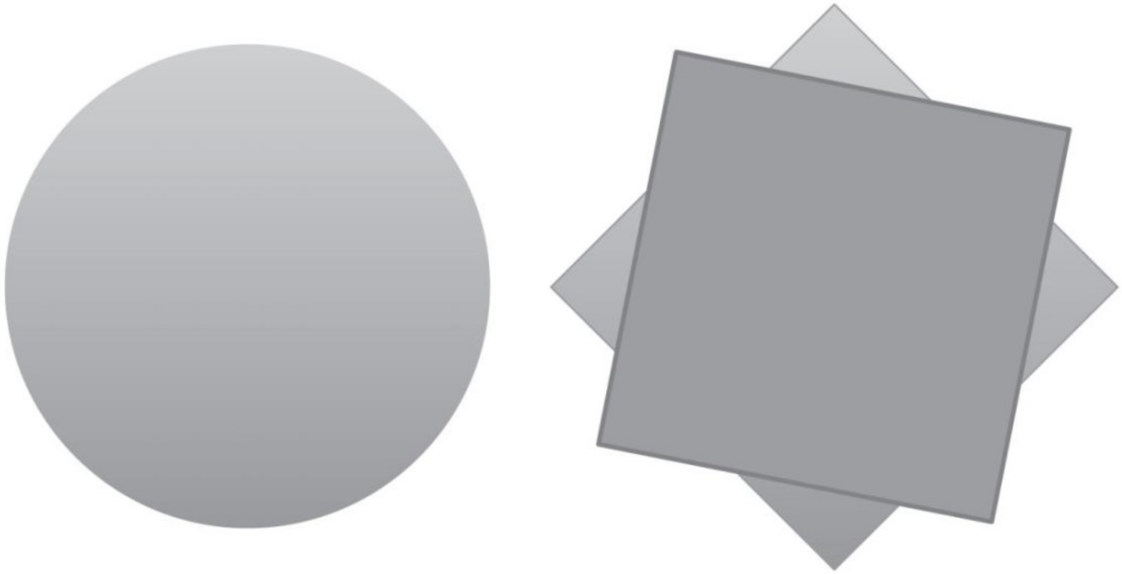
我思索了一会儿，然后回答道：“对称的物体，即使我们转动它，它的形状和位置也会保持不变。我想对称性应该与这个特点有关系。”

叶夫根尼耶维奇点了点头。

“的确如此。我们来研究一下，在发生哪些转动时，这两张桌子会保持形状与位置不变。”他说，“对于圆桌而言……”

我打断了他的话，说道：“围绕中心点，无论怎么旋转，桌子都会处于其先前所在的位置。但是，如果我们随意旋转方桌，一般都会改变桌子的位置。只有当方桌旋转90度或者90度的倍数时，其位置才不会变。”

“说得对极了！如果你离开我的办公室一会儿，我转动圆桌，无论我怎么转，你回来后都不会发现它有什么异样。但如果转动了方桌，你就会发现它有变化，除非我让方桌转动90度、180度或者270度。”



圆桌转动任意角度，其位置都不会发生改变，但是转动方桌时，如果转动的角度不是90度的倍数，方桌的位置就会发生变化（本图是表现两张桌子转动情况的俯视图）

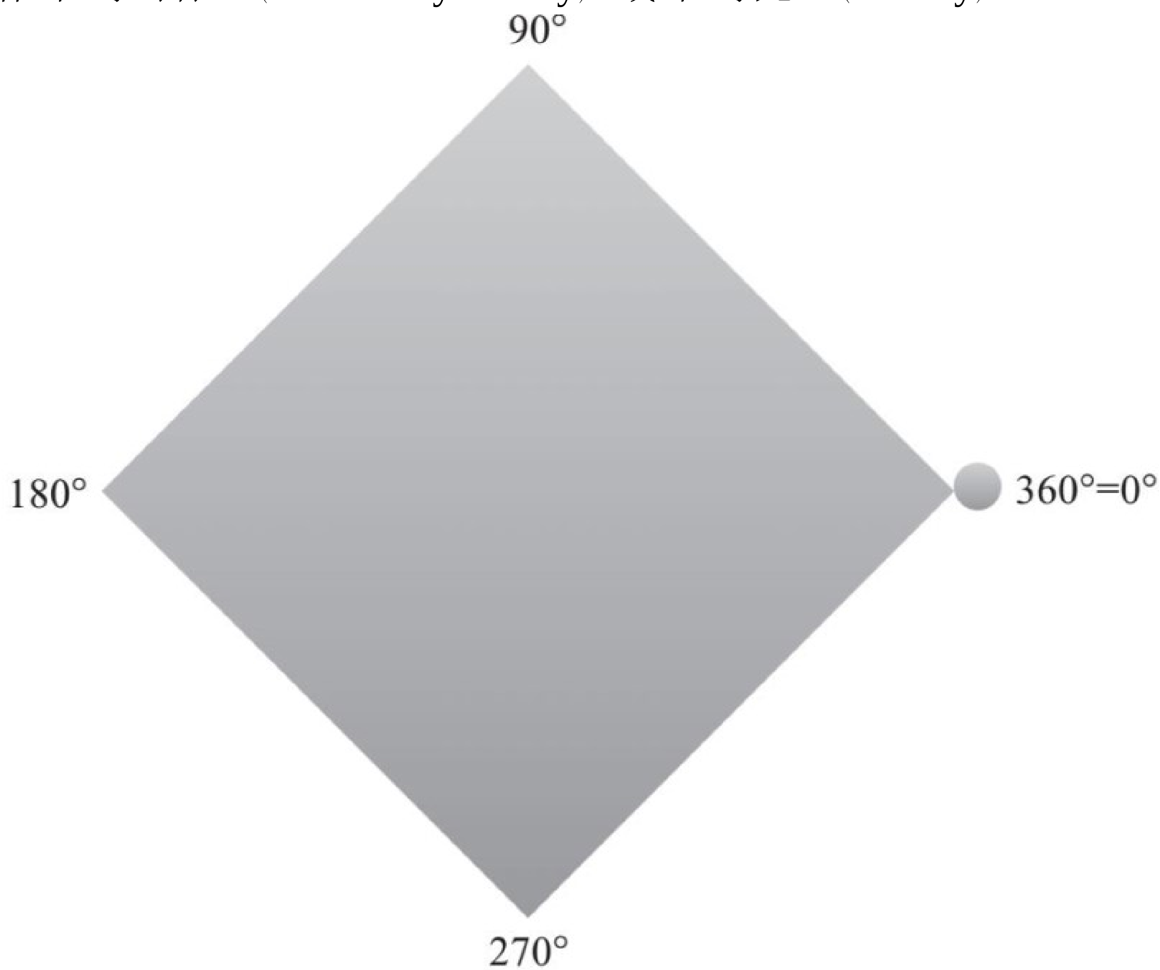
他接着说道："这样的变化叫作对称操作。方桌只有4种对称操作，而圆桌的对称操作数量却要多得多——事实上，圆桌有无数种对称操作。因此，我们会说圆桌更加对称。"

这样的解释很有道理。

"这些都是非常直接的观察，"叶夫根尼耶维奇接着说，"即使你从事的工作不是数学研究，你也会知道这些。但是，如果你是从事数学研究的专业人士，你就会问另一个问题：对于给定物体的对称操作都有哪些？"

我们来看看方桌的情况。方桌的对称操作有4种：围绕桌子的中心点，按逆时针方向旋转90度、180度、270度或360度。数学研究者认为，方桌的对称集合中包含4个元素，分别对应90度、180度、270度和360度的角。我们把它们标记为桌子的四角，每次旋转都会把一个固定的桌角（下页图中带有球形标记的桌角）转动到另一个桌角所在的位置。

在这4种旋转操作中，有一种比较特别。把方桌旋转360度与旋转0度的效果一样，也就是说，旋转360度跟没有旋转一样。的确，桌子上的每一个点的位置，都与其旋转之前的位置相同。这样的旋转是一种特殊的对称操作，对物体本身没有促成任何实质性的变化，我们把它称作“恒等对称”（identical symmetry）或“恒等元”（identity）。



注意，当物体旋转角度超过360度时，其效果会与旋转角度为0度至360度之间的某次操作效果相同。例如，旋转450度的效果与旋转90度的效果相同，因为450=360+90。因此，我们只考虑0度至360度之间的旋转操作。

下面的观察非常重要：如果我们依次完成{90度，180度，270度，360度}集合中的两种旋转操作，其效果与该集合中的另外一种旋转的

效果相同。我们把后一种对称操作称作前两种对称操作的结合。

显而易见的是，这两种对称都能保证桌子位置不发生变化。因此，它们结合后也会保证桌子位置不发生变化，所以，这构成了一种对称操作。例如，如果我们把桌子旋转90度，再旋转180度，最终结果则是旋转270度。

我们看看桌子经过这些对称操作后会产生什么结果。按逆时针方向旋转90度之后，右侧桌角（第16页图中有球形标记的桌角）会移动到上方桌角的位置。

接下来，我们再把桌子转动180度，上方桌角就会移动到下方桌角所在的位置。最终结果是，最初的右侧桌角移动到下方桌角所在的位置，这与将桌子逆时针旋转270度产生的结果一样。

再举一例：

90度+270度=0度

先旋转90度，再同方向旋转270度，则一共旋转了360度。上文讨论过，旋转360度的结果与旋转0度的结果一样，这就叫作“恒等对称操作”。

换句话说，第二次的270度旋转消除了第一次的90度旋转的结果。这其实是一种重要特性：所有对称操作的结果都可以被消除。也就是说，对于任意对称操作*S*，总是存在另一个对称操作*S*′，两者组合后形成恒等对称操作。因此，*S*′被称作*S*的“反演对称”。我们发现，270度旋转是90度旋转的反演。同理，180度旋转的反演操作是其本身。

现在，我们可以看出，看似非常简单的方桌对称操作集合——{90度，180度，270度，360度}，其内部结构特点，即集合中各元素相互作用的规则，实际上比较复杂。

首先，我们可以将任意两种对称操作结合（即依次完成这两种操作）。

其次，存在一种特殊的对称操作，即恒等对称操作。在我们这个例子中，0度旋转就是恒等对称操作。如果我们把0度旋转与任意对称操作相结合，得到的仍然是该对称操作。例如：

90度+ 0度=90度，180度+ 0度=180度，…

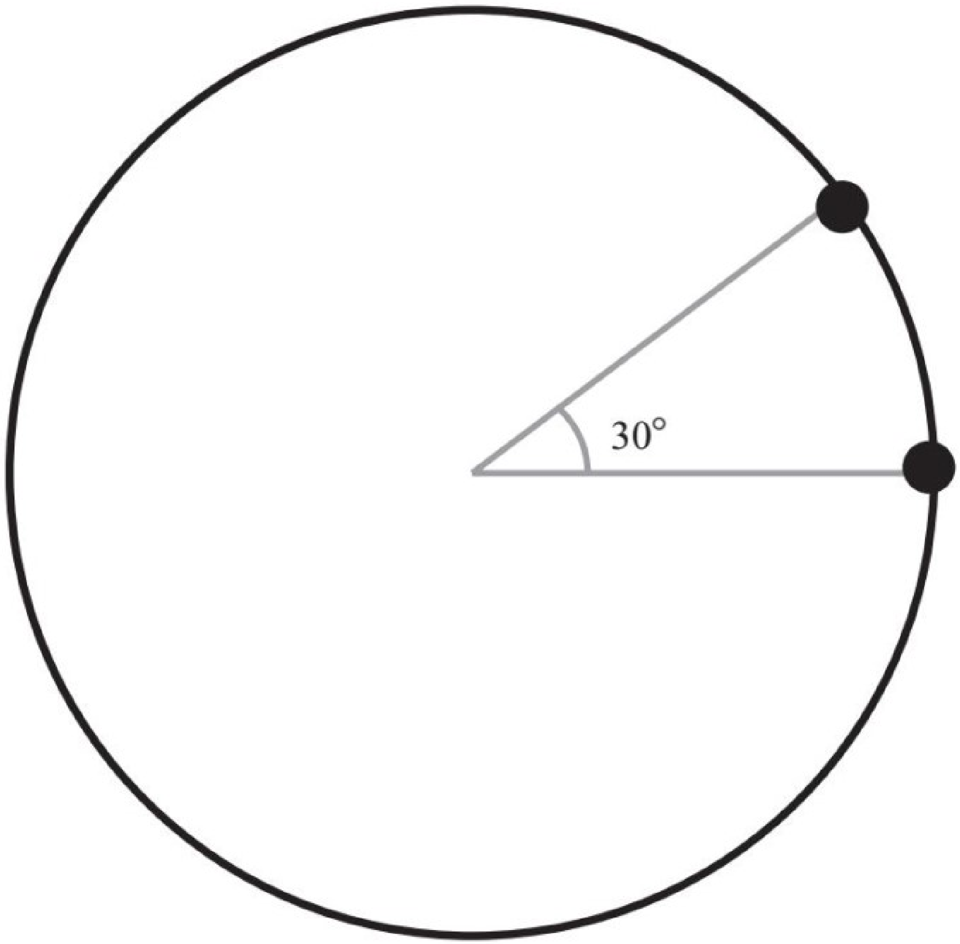
第三，对于任意对称S，总是存在反演对称S'，两者结合形成恒等对称操作。

现在，好戏就要上演了！具备上述三个结构特点的对称操作集合，构成了一个被数学研究人员称为“群”的例子。

任意物体的对称操作都可以构成群，而且一般由更多的元素（甚至可能由无数个元素）构成。

下面我们结合圆桌来讨论这个问题。现在我们已经有了一些经验，可以清楚地知道圆桌的所有对称操作构成的集合，就是所有可能的角度（而不仅仅是90度的倍数）旋转构成的集合，我们以圆上所有点构成的集合来形象地表示该集合。

圆上每个点都分别对应0度至360度之间的一个角度，圆上还有一个对应0度旋转的点，它比较特殊，需要引起注意。下图中，代表30度旋转的点与代表0度旋转的点一起构成了一个30度的角。



不过，我们不能把该圆上的各点看成圆桌上的点。圆上的点表示的是圆桌特定的一种旋转操作。注意：我们可以在这个圆上先选定一个点，即与0度旋转对应的点，而圆桌上并不存在这样的点。

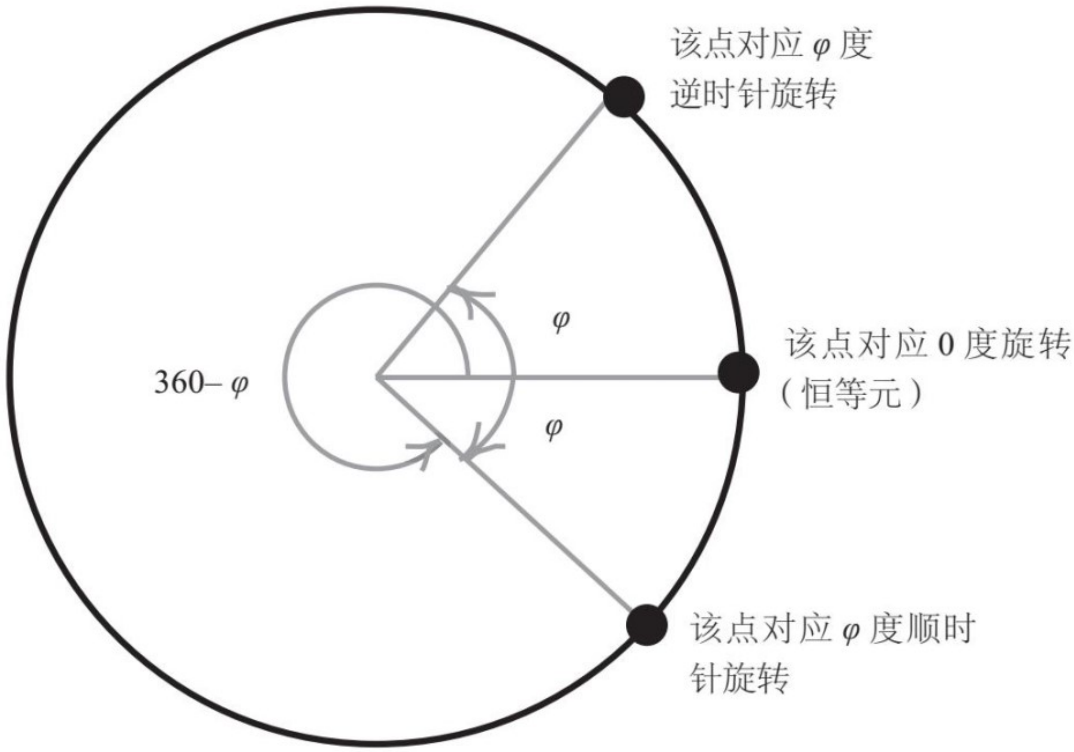
接下来，我们来证明圆上各点是否符合上述三个结构特点。

首先，$\varphi1$度与$\varphi2$度旋转的结合等同于（$\varphi1+\varphi2$）度旋转。如果$\varphi1+\varphi2$的值大于360度，从其和中减去360度即可。在数学上，这种算法被称作“模360度加法”（addition modulo 360）。例如，如果$\varphi1=195$度，$\varphi2250$度，那么两个度数之和为445度，而且445度旋转的结果与85度旋转的结果相同。因此，在圆桌旋转群中，我们有

195度+250度=85度

其次，圆上有一个特殊的点，对应0度旋转。该点是该群的恒等元。

最后，φ度逆时针旋转的反演操作就是逆时针（$360-\varphi$）度旋转或φ度顺时针旋转（见下图）。



至此，我们已经描述了圆桌旋转群的情况，我们把它称为“循环群”。与包含4个元素的方桌对称群不同，圆桌循环群包含无数个元素，因为在0度和360度之间有无数种角度。

以上是我们从纯理论角度对对称的直观理解，也就是说，他们把对称转化成了一个数学概念。首先，我们假设对物体的对称操作就是保持物体本身及其属性不变的一个变化过程，然后我们又完成了一个非常关键的步骤：把研究的重点从物体本身转移到所有由对称操作构成的集合上。对于方桌而言，该集合包含4个元素（90度倍数的旋转操

作）；而对于圆桌而言，该集合是无穷集合（包含圆上所有的点）。最后，我们描述了该对称操作集合始终具备的三个结构特点：任意两种对称操作可以结合成为另一种对称操作；存在恒等对称操作；对于每一种对称操作，都存在反演操作。通过以上步骤，我们得到了“群”这个数学概念。

对称操作群是一个抽象概念，它与我们开始时介绍的具体对象（比如方桌、圆桌）差异甚大。我们无法触碰也无法抬起桌子的对称操作集合，但我们却可以触碰也可以抬起桌子。我们可以通过思考这个抽象概念，推断出其包含的元素，并开展研究与讨论活动。这个抽象集合中的所有元素都有具体含义：代表某个具体对象的某种变化，即对称操作。

数学研究的对象就是诸如此类的抽象对象与概念

经验告诉我们，对称是大自然运转的基本法则。例如，雪花总是呈现为完美的六边形，这是因为六边形是最低能态，水分子在结晶时一定会形成六边形。雪花的对称操作群由60度倍数的旋转操作组成，即60度、120度、180度、240度、300度和360度（与0度旋转效果相同）的旋转。此外，我们还可以沿着与雪花任意顶角对应的轴“翻转”雪花。这样的旋转与翻转都不会改变雪花的形状与位置，因此它们都是雪花的对称操作(注)。

再比如蝴蝶。上下翻转蝴蝶，会使蝴蝶的头部朝下。而且，由于蝴蝶只有身体的一侧有腿，因此，严格地说，翻转不构成蝴蝶的对称操作。我们在把蝴蝶的形状当作对称图形考虑时，是将其假设成理想化的形状，把蝴蝶身体的前后部位看成完全相同的形状（真实情况并非如此）。在这种状态下翻转蝴蝶，使蝴蝶左、右翅膀位置对调，就

会构成对称操作。（或者，我们也可以想象在不把蝴蝶前后翻转的情况下对调其身体两侧的翅膀，结果相同。）

这就引出了一个很重要的问题：自然界中有很多物体只是近似“对称”的。在真实世界中，桌子并非标准的圆形或方形，蝴蝶身体的前后部位不对称，人体也不是完全对称的。但是，即便如此，我们也可以对这些物体进行抽象思考，将其假设成理想化的形状，即模型——把桌子看成规整的圆形，或者把蝴蝶看成身体前后部位没有区别的图形。事实证明，这样处理的效果非常好。我们可以通过研究模型的对称，并根据真实物体与模型之间的差异，对分析得出的所有推断加以调整。

我们研究对象的对称性，并不意味着我们不重视非对称性。事实上，我们经常能感受到非对称当中蕴藏的美。但是，对称数学理论的研究重点不是美学，而是在最具普遍性意义也最抽象的条件下建立对称概念，从而使得这个概念能普遍地适用于所有不同领域，包括几何学、数论、拓扑学、物理、化学、生物学等。一旦我们发展出这样的理论，我们就可以用它来讨论破坏对称性的机制——如果你愿意，可以把非对称看成一种必然现象。例如，基本粒子遵从所谓的“规范性对称”（gauge symmetry），一旦在“希格斯玻色子”（Higgs boson）的帮助下打破这种对称，基本粒子就能获得质量。希格斯玻色子是一种难以辨识的粒子，近几年人们在日内瓦大型强子对撞机中发现了这种粒子。事实证明，研究对称性的破坏机制，可以帮助人们深入了解自然界基本构成单位的作用机制，这具有不可估量的意义。

* * *

对称理论有助于揭示数学的重要意义，因此，我要对这个抽象理论的基本特点进行如下说明。

对称理论的第一个特点是“普适性”（universality）。循环群不仅指圆桌对称群，还包括玻璃杯、瓶子、圆柱等所有包含圆形元素的物体的对称群。事实上，我们说这些物体是圆形，或者说这些物体的对称群是循环群，这两种说法的意思是一样的。这也就意味着，我们可以通过描述对象的对称群（圆）来描述该对象的一个重要特性（“是圆形的”）。同样，“是方形的”这个描述意味着该对象的对称群是上文讨论过的由4个元素构成的群。换句话说，数学中的同一个抽象对象（如循环群）可用于研究多种具体对象，指向这些对象普遍具有的共同特性（如圆形）。

对称理论的第二个特点是“客观性”（objectivity）。比如，群的概念不因我们的理解而发生改变。无论是谁学习群的概念，它的内容都不会有任何变化。当然，要真正理解一个概念，我们必须了解描述这一概念所使用的语言——数学语言，所有人都可以掌握数学语言。同样，如果我们希望读懂笛卡儿（René Descartes）说的“Je pense，donc je suis”，就必须学习法语（至少要学会这句话里的这些单词），而我们都能通过学习达到这个要求。不过，人们在读了笛卡儿的这句话之后，可能会有不同的理解。同样，对于这句话的某种理解，有人认为它是对的，有人则认为它是错的。与笛卡儿的话不同，逻辑严谨的数学语言所表达的意思不存在多种理解的问题，其真实性也是客观的。（一般说来，某个数学命题的真实性可能取决于其所在的公理体系。不过，它仍然具有客观性。）例如，“圆桌的对称群是一个圆”这句数学语言，在任何地点、任何时间以及任何人看来，都是一个真命题。一言以蔽之，数学上的真实性具有客观必然性。关于这个特点，我们将在第8章进行详细讨论。

对称理论的第三个特点是“持久性”（endurance）。这一点与第二个特点的关系极为密切。毋庸置疑，无论对古希腊人还是现代人而言，勾股定理所表述的内容都毫无二致，而且我们有足够的理由相

信，它的内容在未来也不会发生任何变化。同样，本书中讨论的所有为真的数学命题也将永远为真。

世界上存在这种客观真实、持久不变的知识（而且为我们全人类所掌握）也的确是个奇迹。这说明，数学概念存在于物理世界和精神世界以外的一个世界——有时被称作柏拉图式的数学世界（我们将在全书的最后一章做详细讨论）。我们仍然不清楚数学世界的真面目，也不了解促使人们探索数学世界的因素。但是，毋庸置疑，这个披着神秘面纱的实体将在我们的生活中发挥越来越重要的作用，尤其是在先进的计算机新技术与3D打印技术问世之后，其重要性还将进一步提升。

对称理论的第四个特点是数学与物理世界的“相关性”。例如，近50年来，人们在研究基本粒子及其相互作用时应用了对称概念，从而得以在量子物理学领域取得很多成就。从对称的角度来看，电子或夸克等粒子就像一张圆桌或者一片雪花，其特性在很大程度上是由其对称操作决定的。（在这些对称操作中，有的极为精准，有的只是近似对称。）

* * *

夸克的发现就是一个很好的例子，它充分说明了数学理论在物理学研究中发挥的重要作用。通过阅读叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇介绍的那些书，我发现我们在第1章中讨论的盖尔曼–内埃曼强子分类法的核心就是一个对称群。之前，已经有数学家研究过这种群，但是他们根本没有想到该群与次原子粒子有相关性。该群的数学名称是SU(3)群，其中S和U代表“特殊酉群”（special unitary）。SU(3)群的特点与球面对称群（我们将在第10章做详细讨论）非常相似。

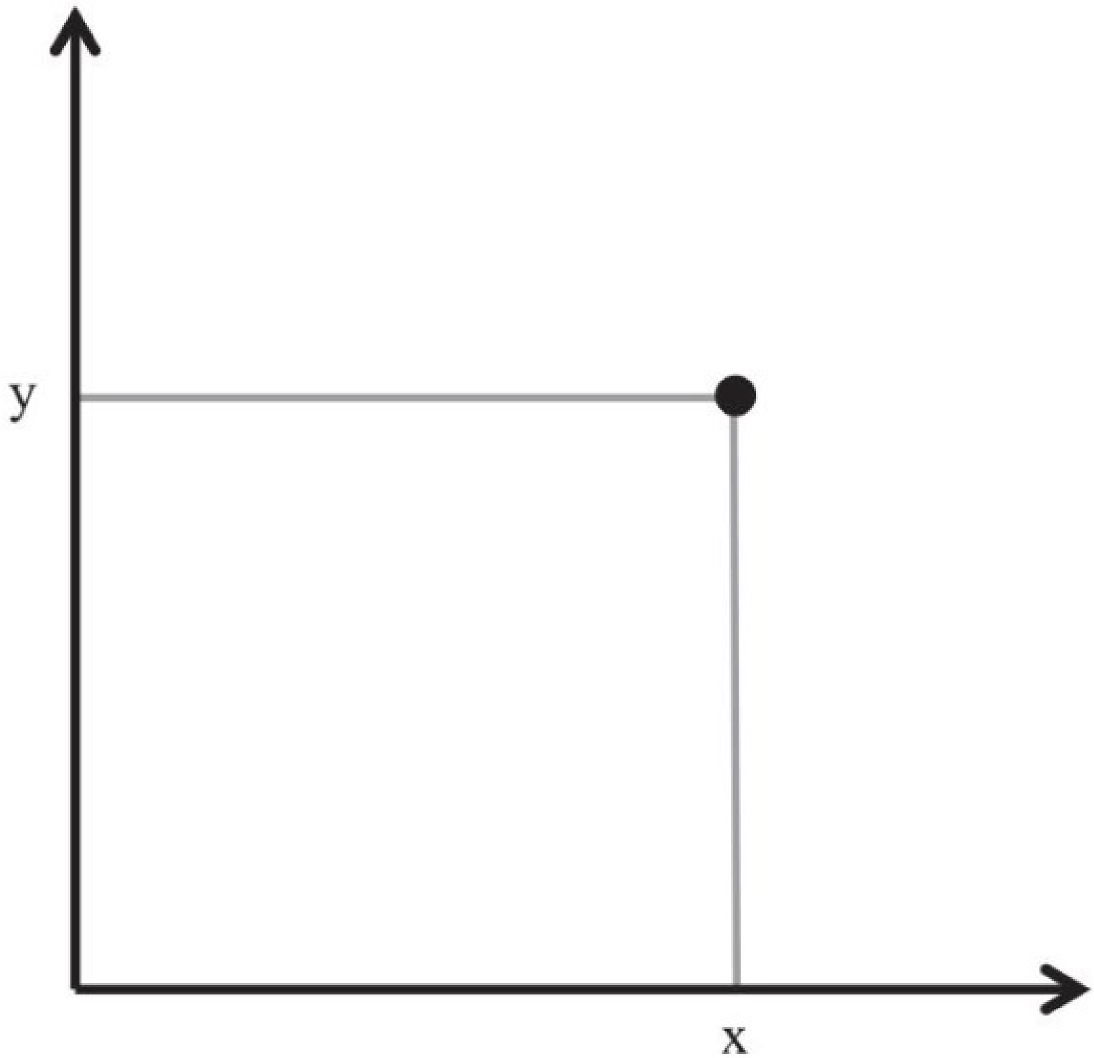
之前，数学家们已经描述过SU(3)群的各种“表示”，也就是将SU(3)群转变为对称群的方法。盖尔曼和内埃曼在发现强子具有某些固

定模式之后，注意到这些模式与SU(3)群的各种表示之间有相似之处，他们就利用这种相似性对强子进行了分类。

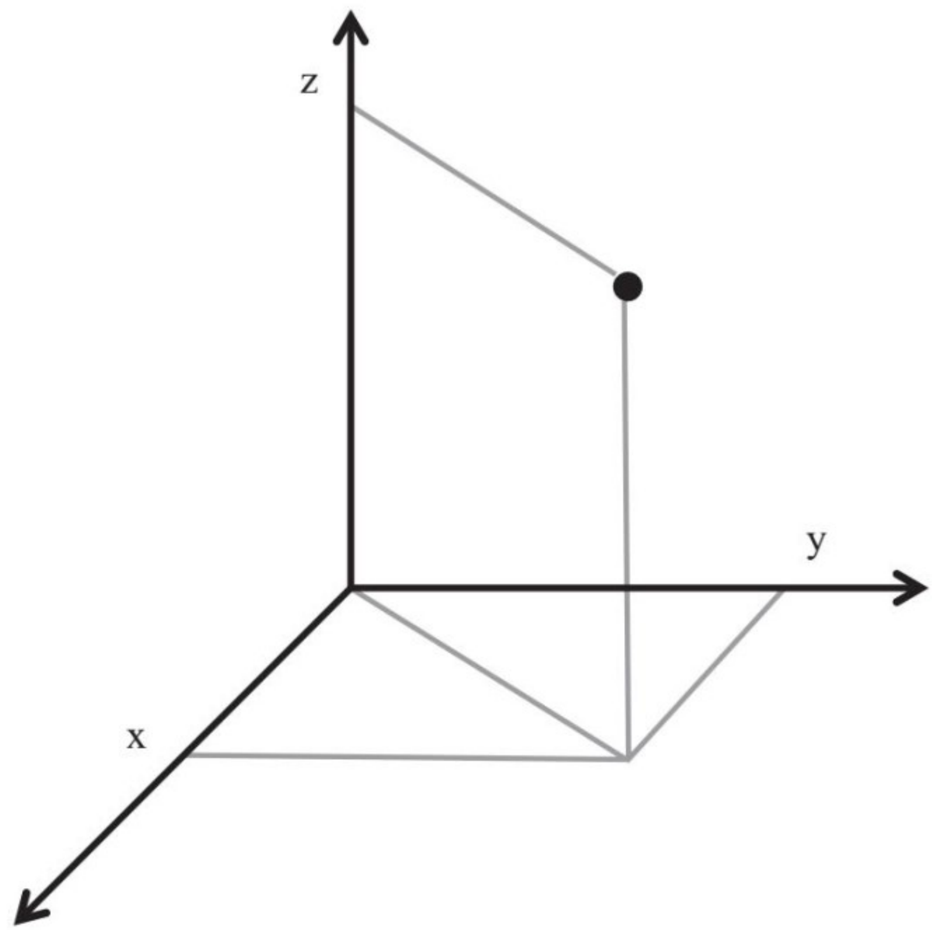
“表示”（representation）一词在数学上的用法比较特别，与其在日常语境下的用法大不相同。这里，我先对这个词在上段文字中的含义做一下说明。举一个例子可能更便于大家理解。我们先来回想一下前文讨论过的圆桌旋转群，接着，我们可以想象桌面沿各个方向无限延伸，这样，我们就得到一个抽象的数学对象：平面。此时，桌面绕中心点的每次旋转都会导致该平面绕同一个点旋转。随后，我们得到一个规则，可以将该平面的一个对称操作（旋转）赋值给循环群的各个元素。换言之，循环群的每个元素都可以用该平面的一个对称操作来表示，数学家将其称作“旋转群的表示”。

由于平面有两个坐标轴，每个点有两个坐标，因此我们知道平面是二维的。

在此基础上我们可以说已经构建出旋转群的一种“二维表示”。



某些空间的维数大于二，例如，我们生活的世界是一个三维空间。也就是说，三维空间有三个坐标轴，因此，为了确定一个点的位置，我们需要规定该点的三个坐标，即（x，y，z）。



我们无法想象四维空间的情况，但是数学提供了一种普适性语言，使我们可以讨论任意维数的空间。也就是说，在讨论三维空间时，我们用三个一组的数字（x，y，z）来表示各个点，同样，我们也可以用四个一组的数字（x，y，z，t）来表示四维空间中的点。依此类推，对于任意自然数n，我们都可以用n个一组的数字来表示n维空间中的点。如果你使用过电子数据表程序，就会遇到这种数字：它们在数据表中表现为n行，这n个数字中的每一个都对应表中所储存数据的某种属性。因此，表中各行分别对应n维空间中的一个点。（我们会在第10章详细讨论各种维数的空间。）

如果某个群的各个元素都可以通过某种一致的方式表现为某个n维空间的一种对称操作，我们就说该群有一种“n维表示”。

研究证明，给定群可能有不同维数的“表示”。基本粒子之所以是包含8个或10个粒子的族系，其原因在于，人们发现SU(3)群具有8维或10维表示。盖尔曼和内埃曼构建的每个八重态中包含8个粒子，与一个8维空间的8个坐标轴构成一一对应关系，而该8维空间又是SU(3)群的一种表示。十重态中的粒子也具有同样的特点。（但是，数学家已经证明，SU(3)群没有7维或11维表示，因此，这些基本粒子不能包含7个或11个。）

人们按照粒子的相似属性为其分组，起初的原因是这样分组比较方便，但是随后，盖尔曼在此基础上迈进了一步，他假设在这种分类方案背后还有深层次的原因。盖尔曼曾说过这样的话，大意是：这种分组方案的效果很好，是因为强子包含了更小的粒子，即夸克；有时包含两个，有时包含三个。物理学家乔治·茨威格（George Zweig）也独立提出了一个类似的概念[茨威格把这种粒子称作“艾斯”（ace）]。

这个新概念的确惊世骇俗。当时，人们普遍认为质子、中子及其他强子是不可再分的基本粒子。夸克的概念明显与这一信条相悖，同时，它的提出预示着新粒子的存在，而且人们从未见过的这些新粒子还具有奇怪的属性。例如，根据预测，这些粒子带有电荷，电量则是电子所带电量的一部分。这个预测令人震惊，因为还没有人观察到这些粒子。结果出乎所有人的预料：科学家们很快就在实验中发现了夸克，而且夸克真的带有一部分电量！

盖尔曼与茨威格是如何得出这个结论的呢？他们做出这样的推断，是基于SU(3)群的表示。SU(3)群有两种表示，而且都是三维表示。（群的名称中包含的数字3指的就是这个意思。）因此，盖尔曼提出，这两种表示应该可以描述基本粒子的两个族系：分别包含三种夸克和三种反夸克。研究表明，可以根据SU(3)群的两个三维表示构建8维和10维表示。这个发现为我们利用夸克构建强子（就像搭建乐高积木玩具一样）绘制了一幅精准的蓝图。

盖尔曼把这三种夸克分别称作“上夸克”“下夸克”“奇夸克”。我们从前文的图示中可以看出，质子由两个上夸克和一个下夸克构成，中子则包含两个下夸克和一个上夸克。质子和中子这两种粒子都属于八重态，而八重态中的其他粒子不仅包含上夸克和下夸克，还包含奇夸克。还有另一些八重态，其中的粒子由一个夸克和一个反夸克构成。

夸克的发现充分说明数学在自然科学中所起到的重要作用，我们在序言中也讨论过。人们预测这些粒子存在的依据不是经验性数据，而是数学的对称模式，是人们在SU(3)群数学表示理论这个复杂的框架下完成的纯理论性预测。物理学家用了多年的时间才掌握了该理论（事实上，有些物理学家最初是抵制这个理论的），现在，这套理论已经变成了基本粒子物理的基础内容了，它不仅帮助我们完成了对强子的分类，还带来了夸克的发现，进而彻底改变了人们对物理现实的理解。

* * *

不妨设想一下：一套看似高深莫测的数学理论，却能帮助我们深入探索构建自然界的“基本元素”，这多么神奇！这些微粒构建了一个深具魔幻色彩的和谐家园，我们怎么能不为之心醉神迷呢？数学这个强大的工具，帮助我们窥探到深藏于宇宙内部的奥秘，我们又怎么能不为之惊叹不已呢？

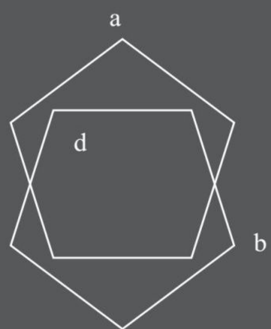
有一个故事广为流传：威尔逊山天文台需要一架望远镜，借此来勾勒人们所处的时空。爱因斯坦的妻子艾尔莎听说这件事之后，说：“哦，我丈夫在旧信封的背面就可以完成这项工作。”

科学家确实需要日内瓦大型强子对撞机这样造价昂贵、结构复杂的机器，但是像爱因斯坦、盖尔曼这样的科学家，仅仅利用最为抽象而且几乎是纯理论性的数学知识，就揭开了我们这个世界埋藏得最深的秘密。这的确令人叹为观止。

我们所有人，无论信仰什么，都可以拥有这种知识。它把我们凝聚在一起，为我们孜孜不倦探索宇宙的热情赋予了新的含义。

---

1. 注意：桌子的翻转不构成对称操作：桌子会四脚朝天——别忘了，桌子有四条桌腿。如果我们考虑正方形或者圆形（不考虑有桌腿的情况），那么翻转也是标准的对称操作，因此也会被纳入对称群。

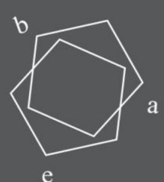


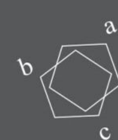


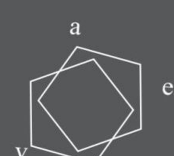


第 3 章

第五道题







叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇的办法奏效了，我“弃暗投明”，把兴趣转移到了数学上，并很快取得了进展。就像坠入爱河的人一样，我越是深入地研究数学知识，便越是深陷其中不能自拔，总是希望能继续探索下去。只要有爱，就会有这样的表现。

我与叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇的见面成了一种惯例。他不断为我推荐书目，而我则每周都要去他任教的教育学院，与他讨论我的读书心得。叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇经常踢足球、打冰球和排球。他的烟瘾也很大，经常一支接一支地抽。因此，在那段岁月之后相当长的一段时间里，香烟味与数学题总在我的脑海里缠绕在一起，挥之不去。

有时，我们讨论得十分热烈，直至深夜。有一次，我们甚至被锁在了学校的礼堂里。管理员根本想不到，那么晚了礼堂里竟然还有人。而我们因为讨论得十分投入，连管理员锁门的声音也没听到。好在礼堂在一楼，我们俩最后翻窗户离开了。

那是1984年，当时我正上高三，面临着报考哪所大学的问题。莫斯科有很多大学，但只有一所大学设有纯理论数学专业，那就是莫斯科国立大学。这所大学的俄语名称是“Moskovskiy Gosudarstvenny Universitet”，缩写为“MGU”，它的力学与数学系实力非常强，在苏联首屈一指。

俄罗斯的大学入学考试与美国学生参加的学术能力评估测试（SAT）不同。报考力学与数学系要参加4门考试：数学笔试、数学口试、论文写作和物理口试。像我这样获得最高荣誉（苏联时期的最高荣誉是“金奖”）的高中毕业生，只要第一门考试取得最高分5分，就会被录取。

当时，我在数学方面的学习内容已经远远超出高中范围，因此，我觉得莫斯科大学的入学考试对于我来说应该如探囊取物。

事实证明，我过于乐观了。我收到的第一个预警信号是一封信，是我就读的一所函授学校寄给我的。这所学校是由苏联著名数学家伊斯雷尔·盖尔范德（后文中我们还会详细介绍这位数学家）等人于多年前创办的，旨在帮助像我这样家不在大城市、无法就读数学专科学校的学生。这所学校每个月都会给我们寄一份小册子，介绍数学专科学校的学习内容，并稍微涉及一些超出正常难度的学习内容。小册子中还有一些数学题，其难度超过高中生在学校里的学习内容，要求我们完成题目后寄回。负责评分的人（通常是莫斯科大学的在校学生）看完我们的解答后，给出分数，然后再寄回给我们。我已经在这个学校学习了三年时间，同时，我还读了另一所侧重物理教学的学校。对我来说，虽然这些学习内容与在普通学校里学到的非常接近（不过，难度与我私下里跟叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇学习的内容根本不可同日而语），但我觉得自己还是有所收获。

这封信并不长："如果你想报考莫斯科大学，请来我校办公室面谈，我们很乐意为你提供咨询。"信中还给出了申请者可去莫斯科大学校园里拜访的具体地址和访问时间。收到这封信后不久，我就乘了两个小时的火车，来到莫斯科。学校的办公室很大，里面摆着一长排课桌，还有几个人正在忙活着——有的在打字，有的在批阅试卷。我做了自我介绍，并拿出了那封信，随后有人把我带到一位娇小的、30岁出头的女性面前。

"你叫什么名字？"她问道，语气并不那么正式。

"爱德华·弗伦克尔。"

"你准备报考莫斯科大学？"

"是的。"

"哪个系？"

“力学与数学系。”

“哦。”她低下头，然后又问道：“你的国籍呢？”

我回答道：“俄罗斯。”

“是吗？那你父母的国籍呢？”“这个……我母亲是俄国人。”

“你父亲呢？”

“他是犹太人。”

她点了点头。

对于这样的对话，你可能觉得莫名其妙。事实上，当我写到这里时，也觉得荒诞不经。但是，在1984年前后的苏联[大家记得乔治·奥威尔（George Orwell）写作的《1984》吗]，调查人们的“国籍”并不值得大惊小怪。在苏联，公民随身携带的国内护照上专门有一栏，要求人们填写“国籍”。这一栏排在第五行，前四行是：(1)名字；(2)父亲的名字；(3)姓氏；(4)出生日期。因此，国籍又被称作“pyataya grafa”，即“第五栏”。在出生证明上同样要求填写本人国籍和父母国籍，如果父母双方的国籍不同，父母可以从中为子女选择一个国籍。我就属于此类情况。

“第五栏”存在的真正原因就是确定一个人是不是犹太人。拥有其他国籍（如鞑靼人和亚美尼亚人，也会受到歧视和迫害，不过其受苦程度比不上犹太人）的人，同样会被甄别出来。我的“第五栏”虽然表明我是俄罗斯人，但是我的姓氏（也就是我父亲的姓氏，一听就知道是犹太人）却让我的家庭情况暴露无遗。

我觉得有必要说明的是，我们家的人并没有宗教信仰。我父亲从小就生活在没有宗教信仰的环境中，我也一样。当时，苏联几乎没有

任何宗教活动。大多数基督教正教的教堂都被毁掉或者关闭了，在仅存的几座教堂里，通常只能看到几位老奶奶。我外婆就是其中之一，她偶尔前往我们的家乡科洛姆纳，去镇上唯一的教堂参加宗教活动。犹太教堂的数量就更少了，我们的家乡连一座犹太教堂也没有，甚至在人口接近1 000万的莫斯科，也只有一家官方许可开放的犹太教堂。去教堂参加宗教活动是非常危险的，有可能会被便衣特工盯上，后果将会相当严重。因此，说到某人是犹太人，不是指他信奉犹太教，而是指他的民族，即“血统”。

但是，即便我没有使用父亲的姓氏，招生委员会同样会发现我的犹太血统，因为申请表明确要求填写父母的全名。

借助这样的规定，这位女士确定了我的犹太人身份，并告诉我：“莫斯科大学不招收犹太人，你知道吗？”

“什么意思？”

“我的意思是说，你根本就不能申请莫斯科大学。别浪费时间了，他们不会录取你。”

我一下子懵了，不知道说什么才好。

“你给我寄来这封信，就是因为这件事吗？”

“是的，我想帮助你。”

我朝周围看了看。很明显，办公室里的人都明白我们谈话的内容，因此没有人表现出惊讶。这样的谈话肯定已经发生过好多次了，大家似乎已经习以为常。他们的目光闪烁，根本不看我，好像我是一名垂死的病人一样。我的情绪低落无比。

* * *

我在莫斯科大学的这次面谈经历从头至尾都显得很诡异，有人也可能会认为，与我交谈的那位女士是出于好心，为了提醒我和其他学生，并帮助我们。但是，真的是这样吗?

莫斯科大学的招生考试一直比其他学校早一个月，没有被录取的学生仍然有机会申请其他学校。

我和父母就这件事进行了长谈，最后我们一致认为，报考莫斯科大学至少对我没有什么坏处。于是，我们决定不放弃，同时在心里祈祷一切顺利。

* * *

第一场考试在7月初进行，是数学笔试，共包含5道题。考生们都觉得第五道题太难了，根本无法解答，它就像这次考试的“第五元素”。但是，我却能够解答出所有题目，包括第五道题。尽管我知道，无论阅卷人是谁，都很有可能对我存有偏见，尽量找出我试卷中的不足之处，但我还是非常详尽地完成了整个解答过程。然后，我反复检查了论证与计算过程，确保准确无误。在乘火车回家的途中我对自己的表现十分满意。第二天，我把我的答题过程讲给叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇听，他确定地说，我的回答没有任何问题。看来，我已迈出了坚实的第一步。

第二场考试是数学口试，安排在7月13日进行，那是一个星期五。

那天发生的很多事，甚至其细枝末节，我至今仍然记忆犹新。考试被安排在下午比较早的时间进行，因此，我和母亲上午就从家里出发，登上了开往莫斯科的火车。我在考试开始前几分钟走进考场，考场设在一间比较普通的教室，里面坐了15到20名考生，还有四五名考官。首先，每名考生要走到教室前方的课桌前，从桌上的一大堆试卷中抽取一份。每份试卷上写有两道题，正面朝下，叠放在一起。抽取

试卷的程序有点儿像摸彩票，因此我们也把试卷称作“bilet”（彩票）。试题总共有100道左右，所有考生事先已经被告知了相关情况。对我而言这些题已经烂熟于心，所以我不在乎会抽到哪两道题。抽完试卷后，每名考生要坐到一张课桌前，用考官提供的白纸作答。

我抽到的两道题是：(1)已知三角形内切圆的半径，求三角形的面积，并列出算式；(2)求两个函数比的导数（只需列出算式）。这两道题我都准备得非常充分，甚至闭着眼睛都能回答出来。

我坐下来，在白纸上写了几个算式，然后整理思路。这个过程大约只花了两分钟，我觉得自己已经准备好了，于是举手示意。教室里有好几名考官，都在等待着考生举手。但是，诡异的是，他们根本不理睬我，目光似乎从我身上直接穿过，就好像我是空气。我坐在那儿，高高地举着手，可就是没有考官理我。

大约10分钟之后，又有一两名考生举手示意。考官们一看到他们举手，立刻飞奔过去。一名考官会坐在举手的考生旁边，倾听他的解答。我就坐在不远处，所以能听到他们交谈的内容。考官们很客气，大多数时间都在点头，偶尔会提出一两个问题。整个过程十分正常：考生答完试卷上的题目之后（大约10分钟），考官会再提出一个问题，让考生口头回答。这些问题都十分简单，大多数考生都对答如流。然后，他们的口试就结束了。

首先举手的那两三名考生已经完成考试，显然他们都拿到了最高分5分，于是心满意足地离开了考场，而我仍然坐在那儿。最后，当一名考官从我身边经过时，我一把拉住他，直截了当地问他：“你们为什么不理我啊？”这名考官比较年轻，像是刚刚博士毕业。他朝周围看了看，然后轻轻地说：“对不起，我们被禁止跟你说话。”

在考试进行了一个小时左右之后，两名中年人走进教室。他们迅速地走到教室前的桌子旁，向坐在那儿的一个人做了自我介绍。那个

人点点头，然后朝我指了一下。很显然，这两个中年人就是我要等的人——我的口试官。

他们走到我的桌旁，表明了自己的身份。其中一个人身材瘦削，动作灵敏，另一个则体型微胖，留着大胡子。

“嗯，”比较瘦的那个人说道（大部分时间都是他在讲话），“我们开始考试吧。第一个问题是什么？”

“已知三角形内切圆……”

他立刻打断我：“圆的定义是什么？”

他表现出一副盛气凌人的样子，这与其他考官的温文尔雅形成了鲜明对比。而且，在考生完整地回答试卷上的问题之前，其他考官不会提出任何其他问题。

我回答道：“圆是平面上与已知点距离相等的点的集合。”

这是圆的标准定义。

“错！”那个家伙兴奋地大喊一声。

这个定义怎么可能是错的呢？他停顿了几秒钟，然后说：“圆是平面上与已知点距离相等的所有点的集合。”

这个说法明显是在抠字眼。这只是第一个信号，说明我接下来还会有其他麻烦。

“嗯，”他接着问道，“那三角形的定义呢？”

在我回答了三角形的定义之后，他认真地思考了一番，显然是在寻找我的错处。然后，他继续问道：“三角形内切圆的定义是什么？”

这个问题把我们讨论的内容延伸到了切线的定义，然后是“直线”，之后又是其他内容，最后他甚至问到了欧几里得第五公理，即平行公理。这个问题已经超出了高中数学的知识范围！我们讨论的那些问题与试卷上的题目根本风马牛不相及，而且远远超出了我应有的知识水平。

我的每句话都遭到质疑，用到的每个概念都要讲出其定义，如果我在回答某个定义时用到另一个概念，那位考官就会立刻要求我回答这个新概念的定义。

显而易见，如果我姓伊万诺夫，他们根本不会提出这些问题。现在回想起来，我当时应该权衡利弊，立刻提出抗议，指出考官们行为的不当之处。但是，那一年我才16岁，这两名考官比我大25岁左右，而且他们是莫斯科国立大学主管考试的官员，所以我当时的想法是，我必须尽最大努力回答他们提出的问题。

在接近一个小时的提问之后，我们才进入试卷上的第二题。此时，所有考生均已离场，整个教室空荡荡的。显然，我是需要被“特殊照顾”的唯一考生。我想，他们在安排考场时，肯定想方设法让每个教室里的犹太考生不超过两名。

第二道题要求我写出求解两个函数比的导数的算式。这道题的要求非常明确，只需写出算式，并不需要给出定义或证明过程。不过，即便如此，考官们仍然要求我回答大量的微积分问题。

“导数的定义是什么？”

然而，我给出的导数标准定义又涉及极限概念。

“极限的定义是什么？”他们接下来问，“什么是函数？”他们提出各种问题刁难我。

* * *

时间又过去了一个半小时，其中一位考官对我说：

“好了。这两道题的回答就到此为止吧。接下来请你回答下面这道题。”

他给出的这道题很难，解答时需要用到所谓的“施图姆定理”（Sturm principle），这方面的知识学校并没有教过。但是，幸好我在函授课程里学过，因此我答出了这道题。正当我在辛辛苦苦地完成最后的计算步骤时，这位考官回到了考场。

“做完了吗？”

“快了。”

他看了一眼我的试卷。毫无疑问，他看出我的解答是正确的，而且我正在完成最后的运算。

“等一等，”他说，“我们换一道题。”

我惊奇地发现，他这次给出的问题的难度是上一道题的两倍。不过，我没有被难住。然而，当我做题做到一半时，这位考官又一次打断了我。

“还没做完？”他说，“那你试试这道题吧。”

如果把这次考试比作拳击比赛，我就是在拳击台上被逼到角落里的那位拳击手，血流满面，在对手暴风骤雨般的进攻下拼命地挣扎，苟延残喘。这道题是对手最后给我的致命一击。乍一看，这道题并不难：已知一个圆和圆外处于同一平面上的两点，过这两点画一个圆，使该圆与第一个圆只有一个交点。

但是，真要解答的话过程却十分复杂。我觉得，即便是一位数学方面的专家也未必能立刻找到答案。这里要用到“反演”（inversion）这个技巧，或者需要经过一番非常复杂的几何作图过程才能完成。但是这两种方法在高中都没有教授过，因此这道题不应该出现在试题当中。

我学过“反演”的方法，也知道在这里要用到它。于是我开始解答，但是几分钟后，口试官们又回来了，坐到了我的旁边。其中一个考官说：

“我告诉你，我刚才把你的情况向招生委员会的副主任做了报告。他问我，我们为什么还要在你身上浪费时间……你看，”他指着一份看上去很正式的表格，这份表格我从来都没有见到过，上面写着几行字迹潦草的字，“在解答试卷上的第一道题时，你的答案不完整。你连圆的定义都不清楚，所以我们判定这道题你答错了。至于第二道题，你的解答表明你的数学基础并不牢固，但是勉强说得过去，所以我们判了半对。因此，你没能完整地解答第一题，第二题也没答对。那么，第三题呢？你也没解答出来。最终，我们别无选择，只能判你不合格。”

我看了看表，从考试开始到现在，已经过去4个多小时了。我已经筋疲力尽了。

“我能看看笔试成绩吗？”

另一位口试官走到那张大桌子前，把我的试卷拿过来，放到我的面前。我在翻看试卷时，恍若身处超现实电影当中。我所有题的答案都是正确的，解答过程也没有问题。但是，试卷上却留下了很多评语，全部是铅笔字迹（我猜，这是因为铅笔字迹容易被擦掉）。而且，这些评语都荒谬至极，就像有人对我开了一个天大的玩笑。我至今还清楚地记得其中一条评语。在运算过程中，我写了“8＞2”，它的

旁边有一条评语：“没有证明过程”，我简直不敢相信。那么，在我正确地解答了所有5道题之后，他们给了我几分呢？不是5分，也不是4分，而是3分！在俄罗斯，3分等于C。我的这些解答难道只能得C吗？

我知道一切都结束了，我说：“那好吧。”

一个考官问：“你准备上诉吗？”

我知道有一个上诉委员会，但是，上诉又有什么意义呢？也许笔试成绩可以从3分提高到4分，但是对口试成绩提出上诉则会困难得多。即便我的口试成绩提高到3分，那又如何呢？我还要面临两场考试，他们总有办法淘汰我。

乔治·斯皮罗（George Szpiro）在《美国数学学会通告》（*Notices of the American Mathematical Society*）里这样写道：

> 如果考生死里逃生，通过了笔试和口试，他在必考的俄罗斯语论文写作考试中也会不及格，评语肯定是“主题阐述不充分”。在被判定不合格后，考生即使提出上诉，胜诉的可能性也几乎为零。上诉的最好结果是不予受理，最糟糕的结果则是因为“蔑视考官”而受到惩戒。

更重要的问题是，这所大学千方百计阻挠我入学，难道我仍要去这样的学校就读吗？我回答道：“不上诉。而且，我希望撤回入学申请。”

考官们立刻释然了。我放弃上诉就意味着他们也无须再费劲了，他们惹上麻烦的可能性也小多了。

“好的，”不断提问的那位考官说，“我马上把你的申请材料拿给你。”

我们走出教室，进了电梯，电梯里只有我们两个人。那位考官显然心情很好，电梯门关上后，他说：“你考得非常棒，你的表现令人赞叹。我甚至怀疑，你是不是上过数学专科学校？”

“我住在小镇里，那里没有数学专科学校。”

“真的吗？那你的父母是学数学的吧？”

“不是，他们都是工程师。”

“太不可思议了……没上过数学专科学校，数学竟然会这么棒，这样的情况我以前从未遇到过。”

在一场耗时近5个小时且极度不公平的考试中，这个家伙刚刚判我不合格，却一转脸就说出这些话来，这真的令我难以置信。在我看来，他扼杀了一名考生成为数学家的梦想，然而，这名考生才16岁，唯一的原因就是他出身于犹太家庭……现在，这个家伙竟然对我大加赞扬，他难道是希望我不计前嫌、敞开心扉接纳他吗?

但是，我又能说什么呢？冲他大吼或者朝他脸上狠狠地来上一拳？显然，这一切都于事无补。于是，我就静静地站在那儿，一声也不吭。他接着说：“我给你一个建议吧，你可以去报考莫斯科石油天然气学院。那里有应用数学专业，非常棒，而且他们可以招收像你这样的学生。”

电梯门开了。一分钟后，他把我的申请材料文件夹递给我。我在中学取得的各种获奖证书从文件夹中露出来，有厚厚一叠，十分扎眼。

“祝你好运。”他说。但是，我身心俱疲，没有回应他，我只想赶快离开那里！

* * *

我走了出去，踏在莫斯科大学这栋气势恢宏的教学楼门前那宽阔的楼梯上。我再一次呼吸到夏天的新鲜空气，远处传来大城市的喧嚣声。天快黑了，周围几乎看不到其他人。我一眼就看到了我的父母，从始至终，他们一直在楼梯这儿等我，望眼欲穿。当他们看到我的表情，还有那个夹在我腋下的文件夹时，他们立刻知道了考试结果。

第 4 章
理论数学与应用数学

考试结束的那天晚上，我和父母亲很晚才回到家。我们还没有从这个沉重的打击中恢复过来，怎么也无法相信白天所发生的一切。

这次考试让我的父母亲都感到一种揪心的痛。我跟他们一直很亲密，他们也总是给我无条件的爱和支持，从不逼我更加刻苦地学习，也没有强迫我选择某个职业，而是鼓励我追逐自己的梦想。当然，他们也会为我取得的成绩而骄傲自豪。这次考试对他们来说是一个彻底的打击，不仅因为考试中的种种不公平，更因为他们觉得自己没有能力保护好自己的儿子。

30年前，也就是1954年，父亲渴望成为一个理论物理学家的梦想被无情地粉碎了。我的祖父和成千上万的无辜人民一样，遭到了政治迫害。1948年，有人捏造了一个罪名，指控他试图炸毁高尔基州（今天的下诺夫哥罗德州）的大型汽车制造厂，他因此被逮捕。祖父被视为“人民公敌”，自然，父亲就是“人民公敌的儿子”。

父亲当时正准备报考高尔基大学物理系。在填写申请表时，他无法回避这段历史。他在高中时获得了无数荣誉，人们都觉得他一定会被录取，但是面试环节却将他拒之门外。父亲只好去一所工科学校就读。

30年过去了，我又走上了父亲的老路。

但是，我们没有时间自怨自艾。我们必须迅速决定下一步该怎么走，认真考虑我要报考哪所学校。所有学校的招生考试都被安排在8月份同时进行，现在只剩下两周时间了，而我只能报考其中一所。

第二天一早，父亲又匆匆忙忙地去了莫斯科，他觉得莫斯科大学那位考官的建议可行。看起来，那位考官真的是想要帮助我，可能是想为他的不公正做法做些补偿吧。父亲到达莫斯科之后，就径直去了石油天然气学院[注]的招生办公室。父亲想方设法找到一个愿意帮忙的

人，并向他描述了我的情况。那个人告诉父亲，因为有大量与我情况类似的考生在被莫斯科大学拒收后，都转而报考石油天然气学院，因此报考应用数学专业的考生水平较高，想通过招生考试绝不是轻而易举的事。但是，他又说：“如果你的儿子真像你说的那么优秀，那么他肯定会被录取。我们学校在招生考试中不会歧视犹太人。”

“但是，我还要说明一点，”最后，他告诉父亲，“掌管研究生院的是另外一群人，我想，你儿子将来有可能进不了研究生院。”

不过，那是5年以后的事了，当时还不必操心。

父亲在莫斯科还考察了设有应用数学专业的其他几所学校，但是校方的态度都不像石油天然气学院那么友好。所以，那天晚上父亲回到家向我们说明了情况之后，我们立刻决定报考石油天然气学院，并且申请应用数学专业。

在莫斯科，有好几所为各行各业培养工程技术人员的学校，其中包括冶金学院、铁道工程学院（苏联的很多高校都叫“学院”）。马克·索尔（Mark Saul）

在文章中指出，从20世纪60年代后期开始，莫斯科大学的反犹太人做法拒绝了“大量犹太裔高中毕业生中的数学人才”。而石油天然气学院抓住了这个契机，招收了很多高素质的犹太裔高中毕业生。

从石油天然气学院的绰号“Kerosinka”（煤油炉）就可以看出这所院校的与众不同与其所奉行的犬儒主义。煤油炉是一种以煤油为燃料的室内取暖器，技术含量不高，但却是应对寒冷天气的有效工具。因此，石油天然气学院的学生与毕业生被人们称作“kerosineshchiks”，而学院则变成了犹太学生的乐土，它为这些对数学怀有美好憧憬的学生提供了良好的教学环境。

当时，石油天然气学院的院长是弗拉基米尔·尼科拉维奇·维诺格拉多夫（Vladimir Nikolaevich Vinogradov）。他头脑灵活，善于管理，并且因为招聘热衷于教学研究创新的人担任老师，以及在教室里推广使用新型教学技术而享有盛名。他制定了一项政策，规定所有考试（包括入学考试）都采用笔试形式。当然，即便是笔试，中间也可能会有黑幕（比如我在莫斯科大学参加的那场笔试），但是，我在莫斯科大学口试中的遭遇不会重演。我暗自揣测，公平对待犹太裔学生的做法可能只是院长个人的决定。如果真是这样，那么他必须具有坚定的意志，同时，还需要一些勇气。

我们认为石油天然气学院的入学考试中不会存在歧视问题，事实也确实如此。我在第一场数学笔试中得到5分，也就是A。在中学阶段得过金奖的考生，如果在第一场考试中得A，就会被直接录取。因此，我无须参加后面的考试。但是，第一场考试的5分得来并不容易，中间还有一个颇为怪异的插曲。阅卷人在向自动评分系统输入我的答案时，明显犯了个错误，结果，我的成绩最初只是4分，即B。我只好启动上诉程序，这意味着我还得等上几个小时。其间，各种糟糕的念头在我脑海里出现。不过，等到我向上诉委员会做了陈述之后，他们很快就发现并纠正了这个错误。他们为此向我道歉，我的入学考试由此落下了帷幕。

* * *

9月1日，新的学年开始了，我见到了我的新同学。石油天然气学院应用数学专业每年招收50名新生（而莫斯科大学力学与数学系的招生人数接近500人）。在我的同学中，很多人都有与我相似的遭遇，他们也都是头脑聪明、有数学天赋的年轻人。

班上的同学大多是莫斯科人，只有两个人例外。我是其中之一，另一个则是来自基什尼奥夫的米沙·斯莫利亚克（Misha Smolyak），我们还成了室友。对于家不在莫斯科的考生，只有在高中毕业之前获得

过金奖，才可以报考石油天然气学院。我非常幸运，恰好符合这个条件。

我的新同学中有很多人曾就读于莫斯科最好的中学，他们还参加过数学特别课程的学习。有的同学大学毕业后选择数学教学作为职业，现在在全世界最优秀的大学里任教。仅仅在我们这一个班的毕业生中，就有好几个人成了我们这代数学家中的翘楚，例如麻省理工学院的帕夏·艾廷葛夫（Pasha Etingof），布兰迪斯大学的迪马·克莱伯克（Dima Kleinbock）和莫斯科高等经济学校的米沙·芬凯伯格（Misha Finkelberg）。身处这样的环境中，我们不由自主地会摩拳擦掌，学习劲头十足。

石油天然气学院的数学课程起点较高，其中数学分析、泛函分析、线性代数等基础课程的难度与莫斯科大学相当。但是，石油天然气学院没有开设几何、拓扑学等纯数学理论课程，仅教授应用数学课程。因此，我们接受的数学教育主要是为了应用，更确切地说，是为石油天然气探测与开采服务。在我们学习的课程中，有很多是偏重于应用的，包括最优化理论、数值分析、概率与统计学，还包括相当一部分的计算机科学课程。

有机会学习这些应用数学课程，我感到非常高兴，因为这些课程让我明白了一个道理："理论"数学与"应用"数学之间并没有一条不可逾越的鸿沟；深奥的应用数学知识必须以精湛的理论数学知识为基础。不过，虽然这些学习应用数学的经历让我收获颇丰，但是我对理论数学的爱仍然矢志不渝。我下定决心，要想办法去学习石油天然气学院没有开设的理论数学课程。

踏破铁鞋无觅处，得来全不费工夫。在与我交往甚密的一些同学中，有的在高中时期就读于在莫斯科享有盛名的数学专科学校。他们也是犹太人，跟我一样，在莫斯科大学的入学考试中被无情地淘汰，只能眼巴巴地看着没有犹太血统的同学一个个顺利地跨入莫斯科大学

的门槛。现在，他们与那些同学取得了联系，对莫斯科大学力学与数学系的情况有所了解，知道那里开设的一些重要课程，而且清楚上课的时间和地点。开学后的第二周，我的一个同学（我现在回想，他应该是迪马·克莱伯克）对我说：

“我们准备去莫斯科大学旁听基里洛夫的课，你和我们一起去吗？”

基里洛夫是一位著名的数学家，他的课我当然想听。但是，我不知道是否真的有这个机会。莫斯科大学宏伟的教学楼外有警察在严密把守，需要有特别通行证才能进入。

“没事儿，”那位同学说，“我们翻栅栏进去。”

实施这个计划要冒很大的风险，但同时又颇为刺激，因此我说：“我去。”

* * *

莫斯科大学教学楼侧面的栅栏非常高，大多有20英尺（约6米）高，但是有一处的金属栏杆弯曲了，人可以从那里钻进去。但是，接下来怎么办呢？我们沿着侧门进入大楼，穿过几段长长的走廊，进入厨房。接着，我们尽量在不引起忙碌的厨房工作人员注意的情况下，悄悄地穿过厨房进入餐厅，再进入大楼主入口处的门厅。最后乘电梯上到14楼，进入礼堂。

亚历山大·基里洛夫（Alexander Alexandrovinch Kirillov，人们亲昵地称他为“San Sanych”）讲课非常棒，人品也特别好。多年后，我有幸结识了这位老师。现在回想起来，他当时讲授的是一门标准的本科生课程，以他的那本颇有影响力的巨著为主线，介绍“表示法理

论”（representation theory）。此外，他还为研究生主持学术研讨会。这些课，我们也都“旁听”了。

我们能够侥幸得到这样的机会，特别要感谢基里洛夫的善心。他的儿子舒里克（Shurik，现在于纽约州立大学石溪分校任教授）与我的同学迪马·克莱伯克和西尔玛·霍金（Syoma Hawkin）是高中同学，都曾就读于179中学（这是一所数学专科学校）。显而易见，基里洛夫对莫斯科大学的招生内幕知之甚详。多年后，他告诉我，他当时也无能为力，招生委员会根本不允许他插手招生事务。因此，他可以提供的唯一帮助就是让我们偷偷地旁听他的课。

在上课时，基里洛夫尽可能地不让石油天然气学院的学生受到排挤。大学一年级的生活给我留下的美好回忆之一，就是聆听他发人深省的教诲。另外，我还参加过亚历山大·鲁达科夫（Alexander Rudakov）主持的一次学术研讨会，那也是一段令人难忘的经历。

与此同时，我还在石油天然气学院抓住一切机会，如饥似渴地学习数学。我当时住校，周末回家时，每隔一两周就要去见叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇。他给我列出书单，我则汇报学习进展。但是不久后，我觉得这样的节奏不利于我保持学习的势头与动力。我需要找一位可以经常碰头的导师——他不仅能给我指导，还能布置一些问题让我钻研。由于我不在莫斯科大学力学与数学系就读，因此无法利用那里丰富的教研资源。而且，我性格内向，不愿意找一个像基里洛夫这样的老师，让他单独辅导，给我布置研究课题。孤立无援的感受悄然爬上我的心头，到1986年春天的那个学期（我在石油天然气学院的第二学年），我的数学学习开始陷入裹足不前的困境。面对种种不利因素，我开始怀疑自己，认为自己可能真的无法实现成为数学家的梦想。

---

1. 当时，该校的名称为古布金石油化工与天然气工业学院，得名于长期担任苏联石油天然气部长的伊凡·古布金（I. M. Gubkin）。在我就读该校期间，校名变更为古布金石油天然气学院，随后又更改为古布金石油天然气大学。

第 5 章
辫群与贝蒂数

就在我开始感到绝望时，情况有了转机。有一天课间休息时，我在石油天然气学院的走廊里碰到了亚历山大·尼古拉耶维奇·瓦尔琴科（Alexander Nikolaevich Varchenko）。瓦尔琴科是我们学院的一位受人尊敬的数学老师，也是世界闻名的数学家，他的老师弗拉基米尔·阿诺德（Vladimir Arnold）是苏联数学界的泰斗。

“你有没有兴趣研究一个数学问题呢？”他问我。

“当然愿意。”我说，“是哪一类题目啊？”我回答的语气很平淡，就好像并不是什么问题我都愿意接手。

“这是我在研究中遇到的一个问题。我觉得这个题目不错，可以交给像你这样聪明的学生。研究这方面问题的专家是德米特里·鲍里索维奇·富克斯（Dmitry Borisovich Fuchs）。”这个人我听说过，也是一位著名的数学家。“我已经跟他说过了，他同意指导学生研究这个课题。这是他的电话号码，你给他打个电话，他会告诉你要做什么。”

像瓦尔琴科这样经验丰富的数学家，在研究中经常会遇到各种尚未解决的数学问题。如果此类问题与自己的研究方向非常接近，他可能会亲自解决这个问题。但是，数学家们不会在遇到每一个问题时都亲自解决，而是把这些问题（通常是他们认为比较简单的问题）分派给学生完成。有时候，这个问题也可能跟这位老师的研究领域没有直接联系，但他（她）却比较感兴趣。瓦尔琴科交给我的问题就属于此类情况，他介绍该领域的专家富克斯来指导我，也是出于这个考虑。总体说来，这是数学界的社会化合作中经常发生的一种“交易”。

但是，这一次的安排还是有点儿异乎寻常，因为富克斯并不是任何大学的正式老师。多年以来，他一直与其他一些具有顶尖水平的数学研究人员一起，私下里教授有数学天赋却被莫斯科大学拒之门外的学生，试图帮助他们摆脱歧视的困扰。

他们组织了多种活动，其中包括被称为“犹太人民大学”的夜校。富克斯等人积极地投身于夜校的教学活动中，为学生们授课答疑，有的课甚至被安排在石油天然气学院的礼堂里进行。当然，这都是我入学之前的事情了。

夜校是由贝拉·莫奇尼克·萨博托夫斯卡娅（Bella Muchnik Subbotovskaya）这位英勇的女性组织起来的，她是夜校的灵魂人物。不幸的是，她遭遇了一场被怀疑为谋杀的车祸，被一辆卡车撞死了。在失去了她的领导之后，夜校很快就分崩离析了。事实上，在我到石油天然气学院上学之前，犹太人民大学就已经不存在了。

尽管夜校已经不存在了，但还是有一小部分数学老师，在私底下从事教学活动，一对一地帮助像我这样遭遇歧视的人。他们找到那些有发展前景的学生，鼓励并指点他们学习，有时候甚至会提供全面辅导。瓦尔琴科在遇到一个数学问题需要让学生研究时，他完全可以通过自己的关系，在莫斯科大学力学与数学系找一名学生去做，但他却把这个任务交给了在石油天然气学院上学的我，而且富克斯也愿意投入时间指导我，原因就在这里。

我很庆幸他选择了我。现在回想一下，如果没有富克斯慷慨无私、不求回报的帮助，我肯定不能走上数学研究的道路。虽然我在石油天然气学院学习应用数学，也去莫斯科大学旁听理论数学，但这些还远远不够。没有人指导，任何学生都无法独立完成研究工作，导师绝对不可或缺。

不过，当时我并不清楚这一切，我只知道我拿到的是著名数学家富克斯的电话号码，我将在他的指导下完成一个项目。这实在令人难以置信，我不知道最终结果会怎么样，但是我清楚，我的处境已经发生了重大转变。

当天晚上，我鼓足勇气，在电话亭里给富克斯打了一个电话。我先做了一下自我介绍。

“哦，我知道。”富克斯说，“我这里有一篇论文，希望你能看一看。”

第二天，我们见了面。富克斯的外貌完全出乎我的预料，他身材很高大，一副生意人的模样。

“给你。”他递给我一篇文章的单行本，“读一读。有任何地方看不懂，都可以给我打电话。”

我小心翼翼地接过论文，仿佛自己捧在手里的是圣杯。

这是富克斯几年前写的一篇关于“辫群”（braid group）的论文，一共有12页。当天晚上，我就开始阅读了。

在这之前，我一边自学，一边接受叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇的指导，已经有三年时间了。看来，这三年时光没有白费，我不仅认识标题中的每一个词，而且标题的意思我也能理解。我决定独立看完整篇文章，这可是关系到自尊心的事啊。我已经开始想象，如果我能做到独立阅读并弄懂这篇文章，富克斯在知道后会露出一副什么样的表情。

此前，我听说过“辫群”的概念。在本书第2章，我们已经讨论过群的概念了，辫群就是一种典型的群。叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇在介绍群的概念时结合了对称的概念，把群中的所有元素看作某个物体的旋转操作。例如，循环群包含圆桌（或者任何“圆形”物体）的对称操作，而包含4种旋转操作的群则跟方桌（或者任何“方形”物体）相关。建立了群的概念之后，我们就可以找出其他一些例子。事实上，有很多群都与对称无关，讨论对称群的首要目的是引入群的概念。这样的

做法其实很常见。人们之所以会建立某个数学概念，其原因往往是数学（或者物理、生物学、工程技术等）领域出现的一些新问题和现象，但是随后，该概念很有可能被用于其他领域，甚至对这些非数学领域具有非常重要的意义。

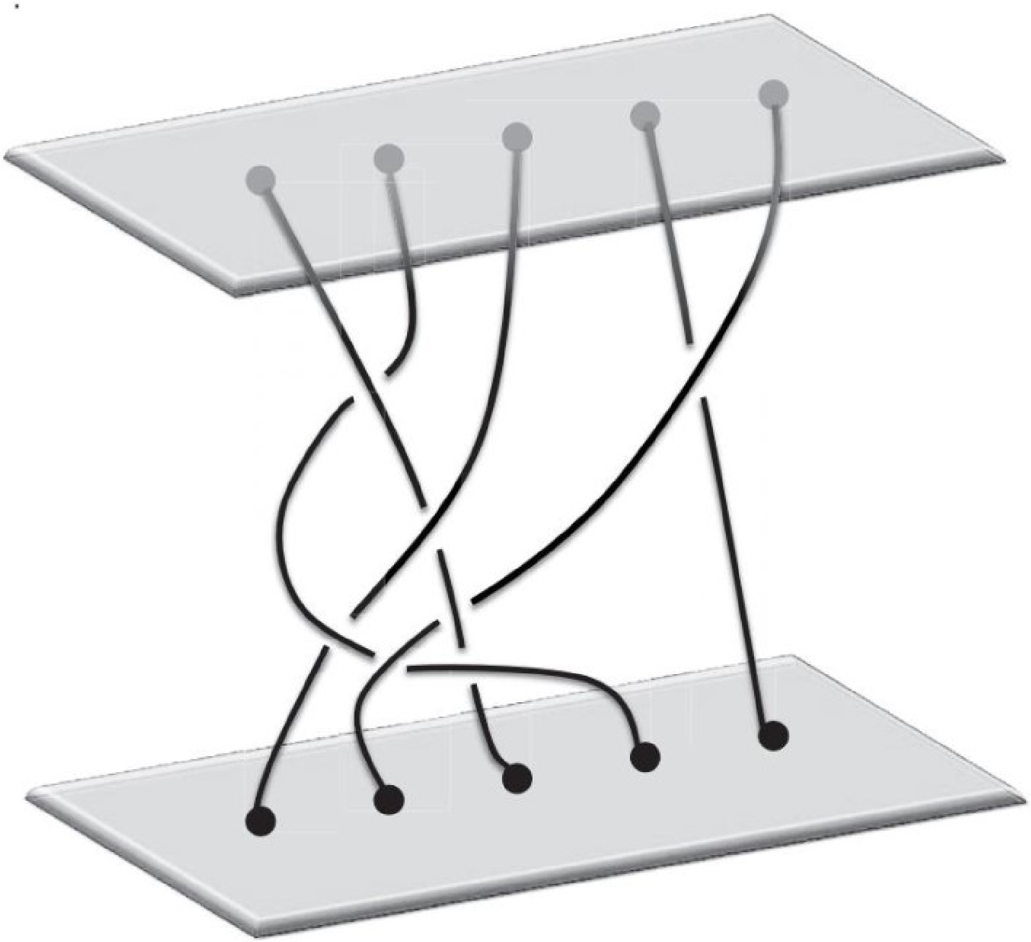
研究表明，很多群并不是来源于对称，辫群就是其中之一。

不过，当时我并不知道在现实世界中，辫群的概念已经被应用于编码学、量子计算和生物学。（这些应用将在后文中进行讨论。）尽管如此，这些抽象的数学概念的美，仍然让我为之折腰。

对于任一自然数n=1，2，3，…总存在一个辫群，我们可以用这些自然数为每一个辫群命名。通常，我们把辫群命名为B_n。当n=1时，我们得到辫群B_1；当n=2时，得到辫群B_2，依此类推。

我们在描述圆桌和方桌的对称群时，需要先描述群里所包含的对称操作。同理，我们在描述辫群B_n时，也需要先描述群中的元素。辫群B_n的元素被称作由n条线生成的辫子。例如，下图表示当n=5时生成的辫子。我们想象有两块坚固透明的平板，每块板上各钉有5颗钉子，将一块平板上的一颗钉子与另一块平板上的一颗钉子用一条线连接。由于平板是透明的，因此我们能看到每条线的全貌。每条线可以通过任意方式与其他线编织在一起，但是不允许自身缠绕打结。每颗钉子只可以连接一条线，两块平板的位置一旦确定就再也不变了。

于是，两块平板和数量不确定的线构成了一个辫子，这就好像一辆汽车包含四个车轮、一个变速器、四扇车门等。考虑辫子时，我们不是把这些组成元素分拆开来，而是把它们作为一个整体加以考虑。

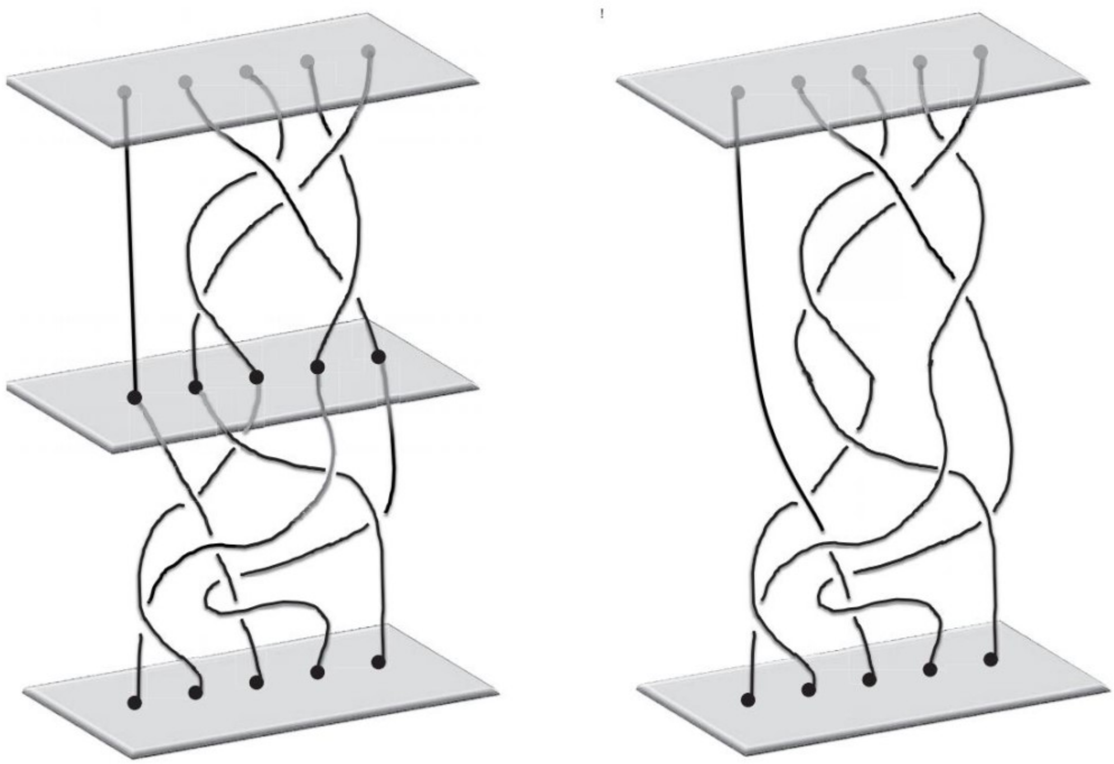


上图所示为由n条线生成的辫子。接下来，我们看看由n条线生成的辫子是如何形成辫群的。此时，我们需要描述两条这样的辫子是如何结合起来的。换言之，我们需要利用两条由n条线生成的辫子，生成另一条由n条线生成的辫子，这个过程与把两种旋转操作结合成第三种旋转操作非常相似。然后，我们还需要检验这一结合是否满足第2章里所列出的结合的特性。

现在，假设我们有两条辫子。为了用这两条辫子生成第三条辫子，我们按照下图（见下页）所示的方式，将一条辫子置于另一条辫子的上面，让钉子对齐，并将这两块平板相接位置的上方和下方处的对应钉子上的线连接起来。

最后得到的第三条辫子，高度将增加一倍，但高度并不是问题。我们可以缩短线的长度，使线的最终高度与之前一样，同时保持各线原先相互缠绕的方式不变。瞧！开始时是两条辫子，现在生成了一条新辫子。这就是辫群的双辫结合规则。

由于辫群并非产生于对称，因此最好不要把上述操作看成“结合”（而在讨论对称群时，这样考虑却没有任何问题），而是把它看作类似于数字运算中的“加法”或“乘法”。从这个角度来看，辫子比较像数字，当然，如果你愿意，也可以把它看成是“头发的数目”。

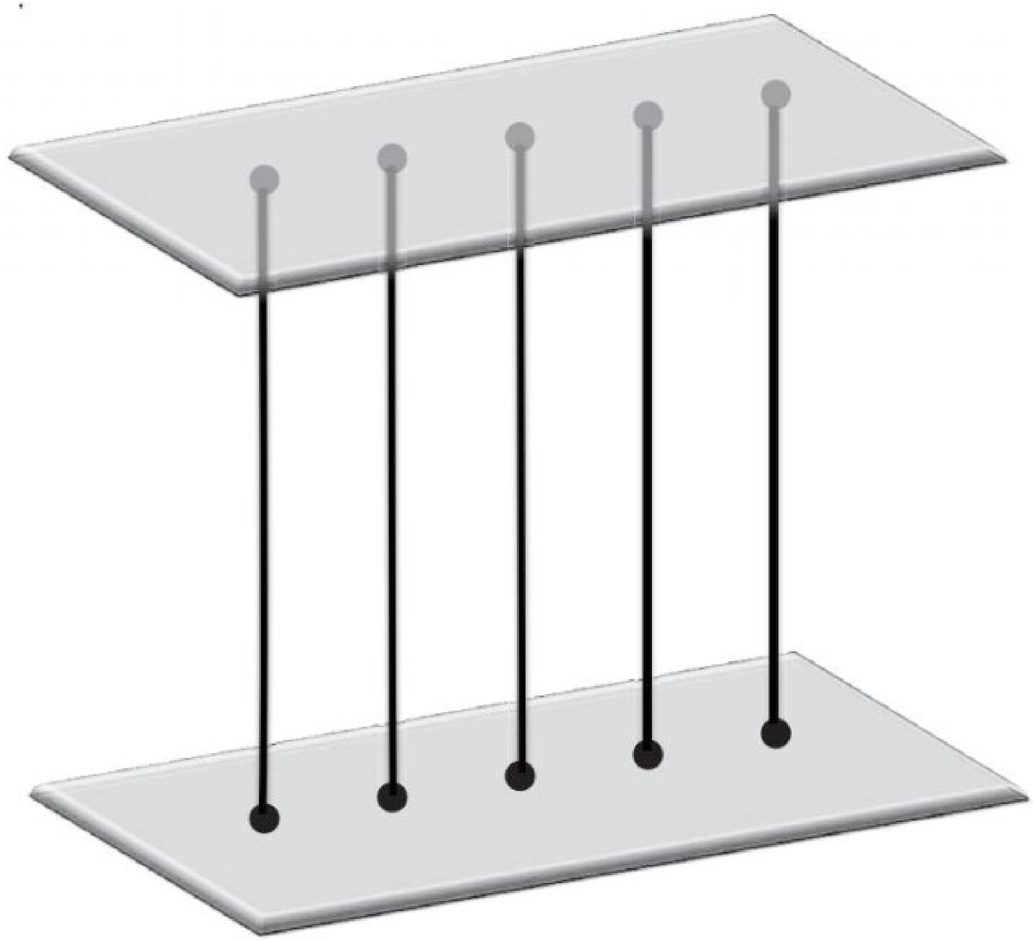


已知两个整数，我们把它们相加，将得到一个新的整数。同样，已知两条辫子，我们也可以利用上述规则，得出一条新辫子。因此，我们可以把这个操作看作两条辫子的“加法”。

现在，我们必须检查对辫子进行的这种“加法”运算是否满足群的所有特性（或公理）。首先，我们需要确定恒等元。（在循环群中，

恒等元是对应0度旋转操作的那个点。）在辫群中，恒等元应如下图（见下页）所示，所有线都不弯曲、不缠绕，是一种“平凡”（trivial）辫子。这种辫子中所有的线都没有相互纠缠，就像0度旋转操作意味着根本没有旋转一样。

接下来，我们需要找出辫子*b*的逆元（在循环群中，逆元就是同一角度的反向旋转操作）。如果把辫子*b*与其逆元相加，根据上述规则，我们将得到“恒等辫子”（identity braid）。



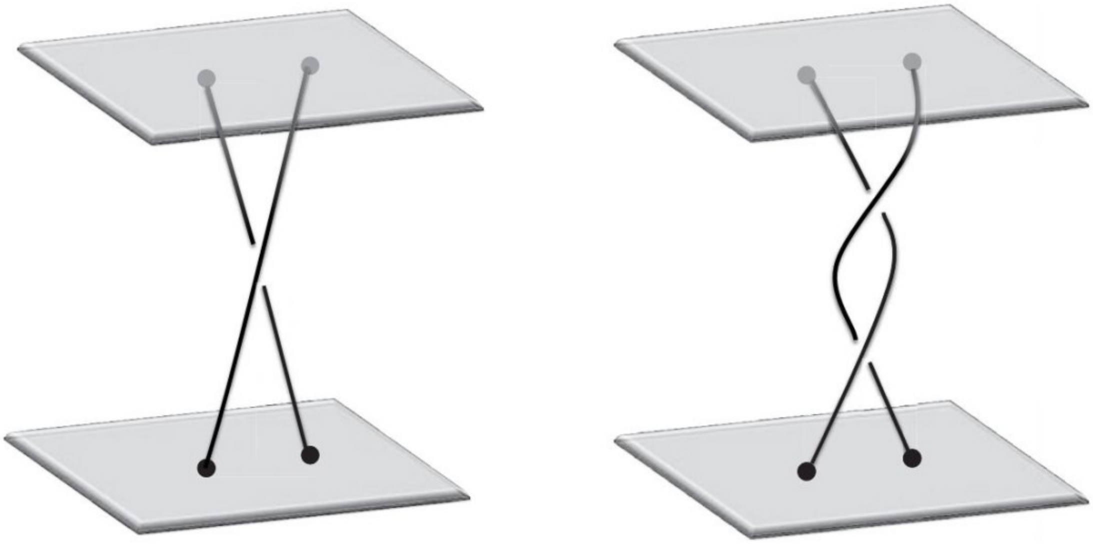
辫子*b*的逆元是该辫子相对于底面平板的镜像。如果我们根据规则将辫子与其逆元结合，我们就可以对所有连线进行重新调整，使其构成恒等辫子。

到目前为止，有一个重要内容我一直避而不谈，现在则需要将其介绍给各位读者。如果我们不是剪断或重新连接辫子中的线，而是以任意方式拉扯、延长或缩短这些线，就能从这条辫子得到另外一条辫子，而且反之亦可，那么，我们认为这两条辫子没有任何不同。换言之，与线条连接的钉子不能变，线也不能打结，在满足这些条件后，我们就可以随意处理这些线了。我们可以借助梳辫子来理解，梳辫子时，辫子还是那根辫子（只不过更漂亮了）。从这个意义上看，辫子与其镜像相加，所得结果与恒等辫子“相同”，甚至说“相同”也不算准确，因为在我们重新编织辫子中的线之后，得到的就是一个恒等辫子。

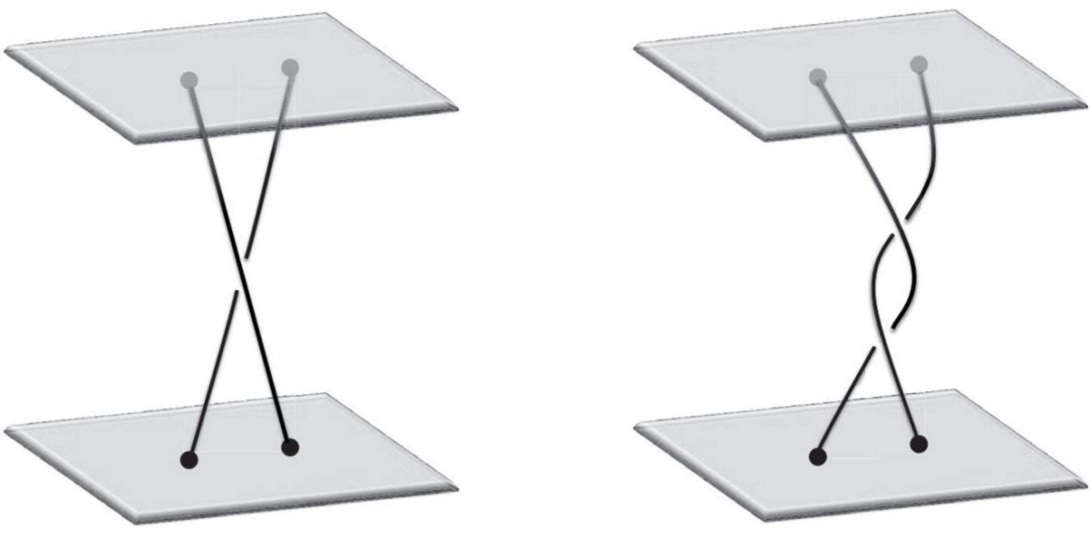
由此我们发现，群的公理，包括结合（或相加）、恒等与反演，都得到了满足。也就是说，我们已经证明了由n条线构成的辫子可以形成群！

为了更具体地了解辫群的特点，我们来仔细观察一下最简单的辫群，即由两条线构成的辫群B_2。（由一条线构成的辫群B_1只有一个元素，无须讨论。）我们为群中的各元素赋值整数N，这里的整数包括：自然数1，2，3，…；0；以及自然数的负数–1，–2，–3，…。

我们为恒等辫子赋值0。如下图所示，如果辫子中的线从上方平板左钉处开始并从另一条线下方穿过，那么我们给它赋值1；如果该线与另一条线缠到了一起，那么我们给它赋值2；依此类推。



如果该线方向与上述方向相反，那么我们为辫子赋值负数：如果该线从另一条线上方穿过，那么我们给它赋值–1；如果该线与另一条线缠绕，那么我们给它赋值–2；依此类推。如下图所示：



按照上述方法赋予辫子的数值被称作“交叉次数”（number of overlaps）。如果两条辫子的交叉次数相同，我们可以通过“梳理”线的方式让这两条辫子相互转换。换言之，根据交叉次数就可以确定特定的辫子。因此，由两条线构成的辫子与整数形成了一一对应关系。

有一个概念我们一直认为它的存在是理所当然的，这里有必要提一下：所有整数的集合本身就是一个群！也就是说，“恒等元”是数字0，对于任意整数*N*，其“反演”是–*N*。这样，第2章里列出的群的所有属性，整数群也都满足。的确，$N+0=N$，而且$N+(-N)=0$。

我们刚才的发现说明，由两条线构成的辫群与整数群拥有相同的内部结构。

在整数群中，无论整数*a*与*b*相加时的先后次序如何变动，其总和都保持不变：

$$a+b=b+a$$

辫群B_2也具有相同的特点，具有这种属性的群被称作“可换群”或“阿贝尔群”[为了向挪威数学家尼尔斯·阿贝尔（Niels Henrik Abel）致敬而以他的名字命名]。

在由三条以上的线构成的辫子中，连线相互缠绕的复杂程度远远超过由两条线构成的辫子。在描述缠绕模式时，仅仅介绍交叉次数是不够的（参见上文中由5条线生成的辫子示意图），因为交叉的方式同样重要。此外，由三条以上的线构成的辫子在相加时，其先后次序（即两条辫子相加时，哪条辫子位于顶部，可参见上文描述对辫子进行相加操作的示意图）也会对结果产生影响。换句话说，在辫群B_n（n=3，4，5，…）中，一般有

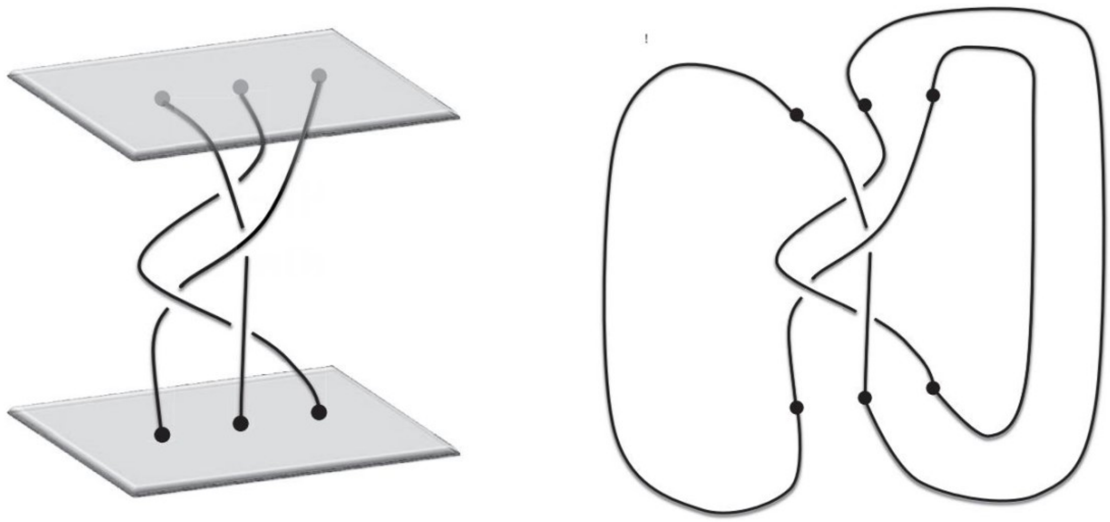
$$a+b\neq b+a$$

这样的群叫作“非可换群”或“非阿贝尔群”。

辫群有很多重要的实际应用，例如，它们被用于构建高效安全的公共密钥。

辫群的另外一个颇具前景的应用方向是通过创建量子粒子[被称作“任意子”（anyon）]的复杂辫子来设计量子计算机。这些量子粒子的运动轨迹相互交错，交叉部分则被用来建立量子计算机的“逻辑门”（logic gate）。

辫群在生物学中也有应用。已知一条由n条线构成的辫子，我们可以给两块平板上的钉子从左至右编号为1至n。然后，将两块平板上相同编号钉子连接的线首尾相连，这样，就形成了一个数学家所谓的“链环”，即多个环路相互交织的联合体。



在上图所示的例子中只有一个环路，数学家称之为“纽结”（knot）。一般情况下，辫群包含多条闭合的环线。

数学上的链环与纽结理论可以应用于生物学。例如，研究DNA与酶的结合。我们把DNA的分子看作一条线，将酶的分子看作另一条线。两者结合而形成的纽结一点儿也不“平凡”，可能会改变DNA的结构。因此，两者缠绕的方式非常重要。事实证明，可以用数学方法对DNA与酶结合而成的链环进行研究，这为人们掌握DNA的重组机制提供了新思路。

辫子的几何意义同样是数学领域的重要研究内容。为理解其几何意义，我们可以考虑有*n*个点在平面上可能的分布情况。我们假设这些点各不相同，即对于任意两点，它们在平面上的位置都不一样。我们选择其中一种情况，例如，*n*个点分布在一条直线上，相邻点之间的距离相等。我们再把每个点都看成一只小虫子，在音乐声响起后，这些虫子就活跃起来，开始在平面上爬。如果我们把时间看作坐标系的纵轴，虫子的运动轨迹就会像一条线。如果这些虫子在平面上的位置永远不相同，即假设虫子之间不会彼此碰撞，那么，代表虫子运动轨迹的线就永远不会相交。在播放音乐时，虫子围绕彼此运动，就像辫子中的线一样。不过，在一段固定的时间之后，我们停止播放音乐，此时，我们要求虫子像刚开始那样排成直线，但是其所处的位置可以随意交换。因此，如果把所有虫子的运动轨迹看作一个集合，那么该集合与由*n*条线生成的辫子将极为相似。

因此，由*n*条线生成的辫子可以被看作平面上*n*个不同的点所构成集合的空间路径。

瓦尔琴科安排我在富克斯指导下研究的那个问题，与一种叫作“换位子群”（commutator subgroup）的辫群有一定关系。别忘了，两条线构成的辫子，线的相交次数是确定的。无论某条辫子是由多少条线构成的，我们都可以用一个类似的数字为该辫子赋值。我们就利用这个办法为含有*n*条线的辫群定义其换位子群：换位子群包括总相交次数为0的所有辫子。

在研究这个问题时需要计算群B'_n的“贝蒂数”（Betti numbers），贝蒂数能够反映这些群在实际应用中具有重要作用的深层次属性。我们以一个具体的物体来打个比方，例如，房子。房子包含多种特点：有的部分特点比较直观，例如楼层、房间、门窗等，而有的部分特点则不那么直观，例如建筑材料的特性。同样，群也有多种特点，贝蒂数表现出来的特点就是其中之一。此前，富克斯本人计算过B_n的贝蒂

数。他让我看他写的论文，目的就是让我对这方面的内容有基本的了解。

在研读那篇论文时，我遇到了一两个我尚未弄明白的概念和定义，但是因为我已经收藏了不少数学方面的专著和资料，所以我可以通过查阅这些资料，自行解决这些问题。一周之后，我完成了阅读任务，便给富克斯打了个电话。

“哦，是你啊，”他说，“我还在想你怎么没给我打电话呢。你开始读那篇文章了吗？”

“已经开始读了，德米特里·鲍里索维奇。事实上，我已经读完了。”

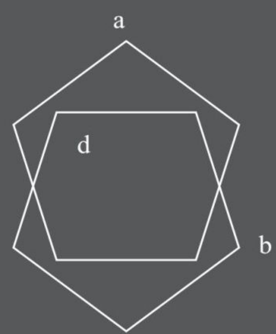
“读完了？”富克斯似乎大吃一惊。“那我们见个面吧，你跟我说说你都从中学到了什么。”

富克斯把见面时间安排在第二天，等他参加完一个专题研讨会之后，就在莫斯科大学与我见面。在为这次见面做准备时，我又反复地阅读那篇文章，揣摩如何回答富克斯可能问到的问题。像富克斯这样的世界知名的数学家，不可能因为同情就指导一个学生，他肯定会设置非常高的门槛。我知道，我们的第一次交流其实是一种面试，因此我迫切希望能给他留下一个好印象。

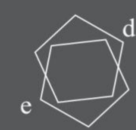
我们在约定的时间见了面，然后在力学与数学系的走廊里找了张长凳坐下，这个地方不会有人打扰。坐好后，我开始向富克斯汇报我的阅读心得。富克斯听得很认真，偶尔会问一两个问题。现在回想，他当时听了我的汇报后好像很高兴。他问我是从哪里学到这些内容的，我把叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇给我的指导以及我自己坚持自学、到力学与数学系听课等经历都告诉了他，我们甚至还聊到了我参加莫斯科大学入学考试的事（当然，富克斯对此并不陌生）。

幸运的是，我们的这次见面非常顺利。我掌握的数学知识给富克斯留下了深刻的印象。他告诉我，我的能力已经足以解决瓦尔琴科提出的那个问题了，而且他愿意为我提供帮助。

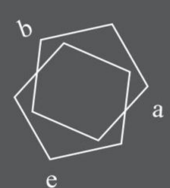
那天晚上，在从莫斯科大学回去的路上，我非常兴奋。是啊，我就要开始独立研究数学问题了，还有一位极其优秀的世界级数学家为我提供指导。虽然力学与数学系的入学考试将我拒之门外，但在不到两年的时间里，我却又回到了数学圈子。一想到这些，我就由衷地兴奋和开心。

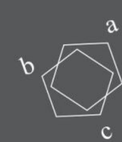


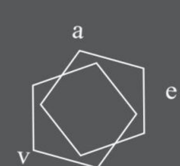




第 6 章
敲开数学世界的大门







研究数学问题就像玩拼图游戏，不过你并不知道最后会得出什么结果。这个问题可能很难，可能很简单，也可能无解，但在动手之前你无法预知。这种不确定性可能是数学家成长道路上的最大难题。而在其他学科领域，就连解决方案应该具备哪些条件都不确定，因此，当遇到无法解决的难题时，研究者可以改弦更张，得出多种答案，甚至修改游戏规则。例如，如果我们接受的任务是提高公司员工的工作效率，那么衡量任务是否完成的标准到底是什么呢？工作效率提高了20%，算不算完成任务了呢？提高10%呢？但在数学领域，关于成功的标准有明确的界定，不容一丝含糊。要么成功，要么失败，两者泾渭分明。

我要解决的问题是计算群B'_n的贝蒂数。这项任务没有一点儿可变通的地方，1986年我刚接触这个问题时如此，时至今日，对于熟悉数学语言的所有人而言也如此，即便再过一百年还会如此，没有丝毫不同。

我知道富克斯解决过类似问题，而且我了解他所使用的方法。我在为完成任务做准备时，通常会借鉴解决类似问题的方法，以便培养自己的直觉力，并掌握一些技能和方法。但是，我无法推断在所有这些方法中我可以借鉴哪些、应该如何借鉴，我也无法预知是否要独创一种全新的技术手段或者找出一套完全不同的解决方法。

所有数学研究人员都会有此类困扰。我们以数学界著名的费马大定理为例，看看当遇到一个易于表述却难以解答的问题时，人们应该如何着手解决。确定一个自然数n，即1，2，3，…，考虑下列方程式：

$$x^n+y^n=z^n$$

其中，x，y，z均是自然数。

如果n=1，那么上述方程式变为：

$$x+y=z$$

显然，这个方程式在自然数范围内有很多解：对x与y取任意值，然后令$z=x+y$即可。注意，在这里我们用到了上一章讨论的自然数的加法运算。

如果n=2，那么上述方程式变为：

$$x^2+y^2=z^2$$

该方程式同样有很多正整数解，例如：

$$3^2+4^2=5^2$$

以上内容，古代的人都已经掌握了，但是，那时的人们却不清楚当n大于2时，此方程式是否有解。这个问题似乎很简单，解决这样的问题能有什么难度呢？

但是，事实证明，这个问题的难度相当高。1637年，法国数学家皮埃尔·费马（Pierre Fermat）在一本旧书的书页边上留下一个评注，指出如果n大于2，则该方程式没有正整数解。换句话说，找不到自然数x、y、z满足：

$$x^3+y^3=z^3$$

或者满足：

$$x^4+y^4=z^4$$

如此等等。

费马在评注中声称，他找到了一个简单的方法，能证明当n大于2时，该命题都为真，但是“页边太小，无法写出证明过程”。众多数学研究人员与数学爱好者都把费马的评注看作一个挑战，试图复现费马的“证明过程”，因此这个问题成为历史上最有名的数学难题，有人甚至为其设立了专门的奖项。人们通过文章或出版物发表了成百上千种证明方法，但都被推翻了。350年来，这个问题一直悬而未决。

1993年，普林斯顿大学的数学家安德鲁·怀尔斯（Andrew Wiles）宣布完成了费马大定理的证明。但是，乍一看，他的证明过程竟与该问题风马牛不相及。怀尔斯没有证明费马大定理，而是给出了“志村–谷山–韦伊猜想”（Shimura-Taniyama-Weil conjecture）的证明过程。该猜想表述起来要复杂得多，而且与费马大定理没有一点儿相似之处。但是，几年前，加州大学伯克利分校的数学家肯·里贝特（Ken Ribet）证明，该猜想预示了费马大定理必然成立（我将在第8章做详细介绍）。我希望大家明白，看上去比较简单的问题，却未必容易解答。现在，大家都清楚，费马大定理虽然是费马提出的，但他很有可能也没有完成证明工作。为了完成这项工作，人们拓展了若干数学分支。不知有多少代数学研究人员前赴后继、呕心沥血，才取得了目前的进展。

但是，看看这个其貌不扬的方程：

$$x^n+y^n=z^n$$

有谁知道它竟然需要如此之多的付出呢？它的复杂程度完全出乎人们的意料！

对于任何一道数学难题，你都不知道在解答它时会涉及哪些内容，你只能希望甚至祈祷自己可以完美地解决这个问题，最好在解答过程中还能有所发现。当然，你肯定希望自己能在有生之年完成这项工作，而绝不会希望等上350年才找到答案。

* * *

就我研究的这个问题而言，我还是比较幸运的。事实上，我只花了比较短的时间——大约两个月，就找到了一个完美的答案。但是，过程并不轻松，这当然是数学领域的常态。我尝试过很多种方法，每次失败之后，我都越发沮丧，也更加焦虑。毕竟，这是我第一次研究一个数学问题，自然而然会把这个问题视为检验我是否具备数学家潜质的第一个考验。

在研究这个问题的同时，我还在石油天然气学院继续我的学业，努力通过每门考试。当然，我的第一要务还是研究这个问题。我夜以继日地思考、研究，甚至周末也不休息。我给自己的压力实在太大了，以至于睡眠出现了问题，这在之前从未有过。失眠是数学研究给我带来的第一个“副作用”，在随后好几个月的时间里，它把我折磨得痛苦不堪。因此，以后再研究数学问题时，我绝不允许自己如此“投入”。

我几乎每周都与富克斯在力学与数学系的教学楼中碰头，向他汇报我取得的进展与碰到的困难（在此之前，他给我办了一张通行证，我就再也不需要钻栅栏了）。富克斯不断地帮助我、鼓励我，每次见面都会教给我一些新知识，提供研究的新视角，我则会在研究中加以应用。

* * *

在研究了一段时日之后，有一天，我有了突破，找到了答案，或者更准确地说，是正确答案驾着五彩祥云出现在了我的脑海里。

那天，我正采用一种标准方法计算贝蒂数。这种方法是富克斯教给我的，叫作“谱序列”（spectral sequence）。有了这种方法，只要知道所有群B'_m的贝蒂数，基本上就可以计算出群B'_n的贝蒂数

（$m<n$）。当然，需要说明的是，我也不知道群B'_m的贝蒂数究竟是多少。

但是，我至少找到了一个解决问题的方法：如果我能猜出正确答案，我就能顺藤摸瓜，找到证明方法。

猜答案说起来容易做起来难，需要进行多次“抽样计算”（sample computation），这导致问题变得越发复杂了。我算了很长时间，却一直没有从计算结果中发现什么规律。

突然之间，我有了灵感。那种豁然开朗的感觉太棒了，就像在拼图游戏完成之后，一幅精美绝伦的图画呈现在我面前，那种摄人心魄的美让我兴奋不已。那些无法入睡的不眠之夜，也一下子变得无比值得了。

平生第一次，我拥有了一份独一无二的财富。我对宇宙有了新的感悟，它不是治疗癌症的妙方，而是价值连城的知识，只归我一人所有。

如果你有过类似的体验，你肯定也希望能够重温这种感觉。那是我第一次产生这种感觉，就像初吻一样，对我而言具有非常特殊的意义。我告诉自己，从此以后，我就可以堂而皇之地宣称自己从事的是数学研究工作了。

* * *

答案的确出人意料，并且远比富克斯和我预想的有意思。我发现，对于自然数n的每一个约数（就是我们所考虑的辫子中线的数量），存在群B'_n的贝蒂数，该贝蒂数与该约数的“欧拉函数”（Euler function）相等。

欧拉函数以一个自然数为任意自然数d赋值，记作$\varphi(d)$，表示数值在1与d之间且与d互质的整数的个数，即与d没有公约数（当然，1除外）的整数的个数。

假设d=6，那么，1与6互质；与2不互质（2是6的约数）；与3不互质（3也是6的约数）；与4不互质（4与6有公约数2）；与5互质；与本身不互质。简言之，在1与6之间，与6互质的自然数有两个，分别是1和5。因此，6的欧拉函数等于2，记作$\varphi(6)=2$。

欧拉函数在实践中有多种应用，例如，它可用于在线交易，作为信用卡号码加密的RSA加密演算法。欧拉函数之所以如此命名，是为了向18世纪瑞士数学家莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）致敬。

我后来发现贝蒂数是由欧拉函数给出的，这一事实表明辫群与数论之间存在一些隐藏起来的联系。由此看来，我所研究的这个数学问题，其重要意义可能远远超出我们当初的想象。

因此，我迫不及待地想告诉富克斯这个发现。当时是1986年6月，距离我和富克斯的第一次会面已经过去了近三个月的时间。此时，富克斯和妻子带着两个年幼的女儿离开莫斯科，去莫斯科附近的郊外别墅过暑假了。还好，他们别墅的位置与我家在同一个方向上，我乘火车回家时在中途下车，就可以去找他了，非常方便。

富克斯按照惯例先给我倒了杯茶，然后开始问起我的研究进展。

“我已经把那个问题解决了！”

我抑制不住内心的激动，以至于在介绍证明方法时，我的语言表达有点儿混乱，但这没关系，富克斯很快就听懂了。他一脸兴奋。

“太好了。”他说，“非常好！接下来，你得把你的发现写成论文。”

这是我第一次写数学论文。我发现，撰写论文与做数学研究相比，令人沮丧的程度一点儿也不少，但给人带来的乐趣却甚是寥寥。在知识的前沿领域探寻新的规律，是一件令人神魂颠倒、兴奋不已的事情，而坐到桌旁厘清思路，把这些新发现写成论文，其乐趣与研究本身却有天壤之别。后来有人告诉我，撰写论文是我们必须经受的惩罚，谁让你享受了那种由数学新发现带来的热血沸腾的快感呢！这是我第一次接受这样的惩罚。

富克斯非常认真，每次看完我的论文后，他都会指出其中的不足之处，并提出改进的建议，我每次拿回来的文稿都被改动得面目全非。他在帮助我时，也从来不计较名利得失。从一开始，我就把他当成论文的共同作者，并署上了他的姓名，但他断然拒绝了。“这是你写的论文。”他说。终于，富克斯认为我的论文修改得差不多了，并建议我投稿到《泛函分析及应用》（*Functional Analysis and Applications*）。这份数学杂志的负责人是苏联数学研究所的权威伊斯雷尔·盖尔范德。

盖尔范德当时70岁出头，身体壮实，极具个人魅力。他是莫斯科数学界的一个传奇人物，每周他都在莫斯科大学主教学楼14层的大礼堂主持学术研讨会。这是一个非常重要的数学学术活动和社交活动，已经有50多年的历史了，享誉全世界。富克斯以前与盖尔范德合作过[他们的合作成果被称作“盖尔范德–富克斯上同调”（Gelfand-Fuchs cohomology），得到了同行们的普遍赞赏]，他还是盖尔范德学术研讨会的高级成员。[研讨会其他成员包括基里洛夫，他以前是盖尔范德的学生；以及格拉维（M. I. Graev），他长期与盖尔范德保持合作。]

盖尔范德主持的学术研讨会与我所参加过的学术研讨会大不一样。通常，学术研讨会的时间都是固定的（在美国一般为一小时或一个半小时），会上安排一名发言人。发言人提前选定某个话题，并做好准备，偶尔会有听众提出问题。但是，盖尔范德主持的学术研讨会

则迥然不同。他的学术研讨会在每周一晚上举行，规定的开始时间是7点，不过，真正开始的时间大多会超过7点30分，在7点45分至8点之间。在开始前一小时左右的时间里，学术研讨会的成员们，包括盖尔范德本人（他通常在7点15分至7点30分到场），都会在礼堂里和礼堂外面的大休息室里四处走动，相互交流。看来，盖尔范德的本意就是这样。他的研讨会与其说是一次数学研讨活动，还不如说是一场社交活动。

大多数出席盖尔范德学术研讨会的数学研究人员并不在莫斯科大学工作，而是来自各个地方。盖尔范德的学术研讨会是他们唯一可以利用的平台，他们在这里与同行会晤，了解数学界的最新动态，分享心得，促进合作。盖尔范德本人也是犹太人，因此，大家认为，他的学术研讨会是犹太人的一个“天堂”，甚至是犹太裔数学研究人员可以在莫斯科市参加的“唯一数学活动”（或者说寥寥无几的数学活动之一）。毫无疑问，论坛发展到这样的盛况，盖尔范德是非常满意的。

我在莫斯科大学招生考试中遭遇的反犹太主义，已经蔓延到苏联学术界的方方面面。

1968年，盖尔范德也因为这个原因被迫离开了莫斯科大学力学与数学系的教学岗位。从此以后，盖尔范德不再是莫斯科大学的数学教授，不过他的学术研讨会得以维系下来，而且研讨会继续在莫斯科大学的主教学楼举行。

此前，富克斯曾敦促我参加盖尔范德的学术研讨会。在那一年的春季学期末，我参加了一两次，那给我留下了特别深刻的印象。盖尔范德以近乎独裁的方式掌控着他的学术研讨会，各个方面的问题都以他的意见为准。尽管在外人看来，学术研讨会的活动似乎混乱不堪，毫无章法，但实际上，盖尔范德投入了大量的时间与精力，精心筹划并准备这一周一次的盛会。

三年以后，当盖尔范德邀请我介绍自己的研究时，我才有机会深入了解这一论坛内部的运行机制。

学术研讨会与独角戏有很多相似之处。按照议程，应该由一名指定发言人就指定话题做报告，但对于盖尔范德的学术研讨会而言，这只是其中的一部分内容。盖尔范德经常抛出其他问题，然后点其他人的名字，让他们来到黑板前，在事先没有准备的情况下，向大家讲解这些问题。不过，盖尔范德一直是研讨会的焦点人物。整个学术研讨会的流程尽在他一个人的掌控之中，他有绝对的权力随时打断发言人，提出问题、建议或发表评论。我仍然记得他说“Dayte opredelenie”（给出定义）时的神情，他经常会这样告诫发言人。

他还有其他一些习惯，比如，就各种话题（有时与所讨论的材料根本没有一点儿关系）高谈阔论，说笑话，讲各种奇闻逸事，经常逗得人们哄堂大笑。我在序言里提到的那个意味深长的故事就是在他的研讨会上听到的：一个醉汉可能不知道2/3和3/5哪个大，但他肯定清楚三个人分两瓶伏特加比五个人分三瓶好。盖尔范德的拿手好戏之一就是“重新表述”别人提出的问题，有时候，经过他的重新表述，答案就呼之欲出了。

他说的另一个笑话与无线电报有关。“20世纪初，有人在参加派对时问一位物理学家：你能解释一下无线电报的工作原理吗？这位物理学家回答说：很简单啊。你首先要知道普通电报是如何工作的：你可以想象有一条狗，狗头在伦敦，狗尾巴在巴黎。你在巴黎拉一下狗尾巴，狗就会在伦敦叫起来。无线电报的原理跟普通电报差不多，只不过没有狗。”

每次当盖尔范德老调重弹，把这个笑话再讲一遍时，即使那些已经听过很多次的人也会笑得前仰后合。等大家的笑声停下来之后，盖尔范德又会把大家的注意力引导到正在讨论的数学问题上来。如果他

认为解答这道题要用到一种全新的方法，他就会说：“我们现在要做的事情，就是在没有狗的情况下听到狗叫声。”

指定一名“kontrol’nyj slushatel”（效果检验人）是学术研讨会经常使用的一种方法。效果检验人通常由一名资历较浅的研讨会成员担任，每隔一小段时间，他就要复述发言人介绍的内容。如果这名效果检验人听懂了，复述内容较完整，就说明发言效果不错。否则，发言人就需要放慢节奏，把问题解释得更详细一些。有时，如果某位发言人不知所云，让大家如坠云里雾里，盖尔范德就会不留情面地把他赶下台，以其他人选替换他。不过，这样的情形并不多见。（当然，盖尔范德也喜欢取笑效果检验人。）正是因为有这样的机制，学术研讨会的活动才会妙趣横生。

大多数的学术研讨会都表现出一种按部就班的节奏。听众安静地听着（有的人可能昏昏欲睡），要么是因为自命清高，要么是因为礼貌，要么是因为担心害怕，总之，听众们基本不会提问。参加这样的活动，收获可能不大。而盖尔范德的学术研讨会则颠覆了这一惯例，它绝不会是一成不变的节奏。毋庸置疑，这样的特点不仅可以让人们一直保持头脑清醒（考虑到活动经常持续到半夜，保持清醒并不是一件容易的事），而且还能以特有的方式激励他们去思考。盖尔范德对发言人的要求很高，迫使他们必须精心准备。当然，盖尔范德自己也不闲着。姑且不论人们如何评价研讨会，至少参加的人都有所收获，不会空手而归。

* * *

在我刚开始参加盖尔范德的学术研讨会时，盖尔范德安排弗拉基米尔·卡扎科夫（Vladimir Kazakov）做了一次系列报告，介绍他在矩阵模型领域的研究成果。卡扎科夫是一名学物理的年轻人，他别出心裁地利用量子场论，得出了数学家们通过传统方法无法获得的数学研究成果。盖尔范德一直对量子物理很感兴趣，量子物理也一直是这个

学术研讨会的重头戏。卡扎科夫的研究让他感触颇深，因此他不遗余力地在数学界予以推介。他屡屡展现的前瞻性再次得到验证：几年后，这项研究声名鹊起，推动物理学与数学领域的一次又一次重大突破。

在系列报告中，卡扎科夫不厌其烦地向台下从事数学研究的听众解释自己的想法。盖尔范德表现出异乎寻常的礼貌，从头至尾都没有打断卡扎科夫，给他的发言时间也比其他人长得多。

在同一时期，德国数学家约翰·哈勒尔（John Harer）和唐·查吉尔（Don Zagier）合作完成了一篇论文，完美地解答了一个非常难的“组合论问题”（combinatorial problem）。唐·查吉尔以善于解决难题而闻名于世，他头脑敏捷，反应很快。据说，他解答这个问题仅花了6个月的时间，他本人也觉得很自豪。等到卡扎科夫再次登台，继续做系列报告时，盖尔范德请他用自己的矩阵模型研究成果来解决哈勒尔–查吉尔问题。盖尔范德觉得，卡扎科夫的方法应该可以用来解决此类问题。事实证明，他是对的。卡扎科夫并不知道哈勒尔和查吉尔合著的那篇论文，也没听说过这个问题。他站在黑板前思考了几分钟，随后就写出了量子场论的拉格朗日（Lagrangian）函数，并用拉格朗日函数解决了这个问题。

坐在台下的所有人都目瞪口呆，但是，盖尔范德似乎并不吃惊，他问卡扎科夫：“沃洛佳，你从事这项研究有多少年了？”

“我也不清楚，大概有6年了吧。”

“哦，也就是说，你花了6年加两分钟的时间来解决这个问题，而唐·查吉尔只用了6个月。嗯……你明白自己跟他的差距了吧？”

跟其他笑话相比，这个“笑话”已经算十分温和的了。要在这样的环境中生存下去，你必须内心足够强大。遗憾的是，有人认为在公开

场合贬低他们是针对他们个人的行为，因此他们无法接受。不过，我必须补充一点：对于年纪较大、在数学领域已有建树的人，盖尔范德的语气往往更加尖锐刻薄；而对于从事数学研究不久的年轻人，尤其是学生，他的语气则温和得多。

盖尔范德经常说，他的学术研讨会欢迎所有本科生参加，也欢迎有天赋的研究生参加，但是对于老师，只有其中的精英才可以参加。他认为，要让数学这门学科不断发展，数学人才的培养和储备非常重要，因此，他总是和有天赋的年轻人待在一起，这也会让他一直保持年轻（在接近90岁高龄时，他仍然在积极地从事前沿研究）。他甚至经常邀请中学生参加论坛活动，并安排他们坐在第一排，以确保他们在认真倾听。（当然，他们都不是普通的中学生，其中有很多人后来成为世界知名的数学家。）

人们一致认为，盖尔范德对待学生非常慷慨，经常花大量时间与他们交流。很少有其他老师能做到这一点。当然，做盖尔范德的学生也不是易事。他的关爱非常“粗暴”，学生们必须对他的各种古怪行为和专横的态度习以为常。不过，我与他的许多学生交流过，他们都非常信任盖尔范德，认为他对自己的帮助很大。

我不是盖尔范德的学生，但我算是他的“徒孙”，因为我的两个老师富克斯和鲍里斯·费金（Boris Feigin，此时他还不认识我），都是盖尔范德的学生。因此，我一直认为自己是“盖尔范德学派”中的一员。盖尔范德多年后在美国与我相遇时问及此事，我点头表示肯定，盖尔范德脸上露出了满意的神情。看得出来，他对学派成员的身份问题是非常看重的。

学术研讨会是这个学派的核心工作之一，也起到了窗口的作用，把它深远的影响力推及整个莫斯科，乃至全世界。苏联之外也有一些数学研究人员，会专程赶到莫斯科拜访盖尔范德，参加他的学术研讨会。很多人都把应邀在他的学术研讨会上做报告看作一种荣誉。

学术研讨会之所以拥有如此显赫的声名，盖尔范德的鲜明个性居功至伟。几年后，他对我的研究产生了兴趣，邀请我在学术研讨会上发言。我花了大量时间与他交流，不仅讨论数学，还谈到了很多其他内容。盖尔范德对数学史，尤其是他本人的传奇经历十分在意。我清楚地记得，我第一次去他在莫斯科的公寓拜访他时（当时我刚满21岁），他告诉我他认为自己就是数学界的莫扎特。

“大多数作曲家都因为某些作品而不朽于世，”他说，“但是莫扎特不一样。他之所以有那么大的影响力，是因为他的全部作品。”他稍稍停顿了一下，接着说：“我在数学界亦如此。”

姑且不提这样的自我评价会引发多少有意思的问题，至少我认为这个比喻非常恰当。尽管盖尔范德没有证明过任何长期悬而未决的著名猜想（例如费马大定理），但是他的一些理念持续不断地影响着数学界，经过日积月累，已经达到了令人震惊的程度。更重要的是，盖尔范德不仅对数学蕴含的美十分感兴趣，他还拥有极为敏锐的直觉，知道在数学领域中哪些问题最有研究价值和前景。他就像一位神谕的传达者，能预知数学的发展方向。

如今，数学这门学科的分支越来越多，专业化程度也越来越高，但涉足多个分支并能在不同领域纵横捭阖的人并不多，盖尔范德就是其中一个。他向世人宣告数学是一个完整的统一体。大多数的学术研讨会都只关注数学的某个具体领域，而参加盖尔范德学术研讨会的人们会发现，所有不同的数学分支都彼此关联，形成统一的整体。之所以每个月莫斯科大学主教学楼14层都会有来自各地的人们济济一堂，原因就在于此。

* * *

我的第一篇数学论文完稿后，富克斯建议我投稿的刊物正是由这位令人敬畏的数学家创办的。盖尔范德的《泛函分析及应用》杂志每

年出版4期，每期只有100页（对于这样的期刊而言，100页的确太少，但是出版商拒绝增加页数），但它在世界范围内口碑很好。该杂志还被翻译成英语，全世界有很多家自然科学图书馆都会订阅它。

要想在这份杂志上发表论文，难度相当大，原因之一就是该杂志有严格的页数限制。其刊登的论文分为两类，一类是研究论文，篇幅通常为10~15页，需要包括详细的证明过程；另一类是简短告示，仅陈述研究成果，无须说明证明过程，篇幅不能超过两页纸。从理论上讲，在发表一篇简短的告示之后，还应发表一篇研究论文，提供所有证明过程。但实际情况并非如此，因为要发表篇幅较长的研究论文难度很大。的确，在苏联，研究数学的人几乎不可能在国外的期刊上发表论文（必须申请各种保密许可证，往往需要一年多时间，费很多周折）。同时，对于数学研究者而言，苏联的数学类出版物的数量实在太少。而且，很多出版物被各种团体控制，不接受团体成员以外的人投稿。更有一些出版物奉行反犹太主义。

在这种情况下，苏联的数学论文圈中形成了一种“亚文化”现象：所有的数学论文都非常简洁，关于证明过程的介绍极少。这种现象后来被称作数学论文的“俄罗斯传统”。

富克斯为我的第一篇论文设定的目标就是以简短告示的形式发表。

投到《泛函分析及应用》杂志的所有稿件，包括简短告示，都必须经过盖尔范德的筛选和批准。如果他感兴趣，就会让论文进入标准的审阅程序。因此，为了让他同意发表我的论文，我必须跟他见面。1986年秋天，在那个学期初的一次学术研讨会之前，富克斯把我引荐给盖尔范德。盖尔范德与我握手后，微笑着对我说：“很高兴见到你，我听说过你。”

当年的我有强烈的明星情结，我发誓我当时看到盖尔范德头上有一圈光环。

接着，盖尔范德转过身，向富克斯索要我的论文。富克斯把论文递给他，他翻看起来。论文一共5页，纸面很干净。我从石油天然气学院借来打字机，（用两根手指慢慢地）将论文打出来，文中插入的各种公式都是亲笔写上去的。

“很有意思，”盖尔范德赞许道，然后他转过头去问富克斯，“不过，这篇论文有什么重要意义啊？”

富克斯开始解释，诸如，*n*次多项式有不等根的判别式，而我的研究成果可以用来描述判别式的纤维拓扑结构，等等。盖尔范德打断了他。

“米嘉，”他用的是富克斯名字的简称，“你知道我们的杂志有多少订户吗？”

“我不知道。”

“1 000多个。”对于这样一份专业性非常强的杂志来说，这个订阅数已经很大了。“我不可能在杂志上给你留出篇幅，以便你给每名订户解释这篇论文的重要意义吧？我能这样做吗？”

富克斯摇了摇头。

“论文必须把这些都交代清楚，对吗？”说这句话时，盖尔范德紧紧盯着富克斯的眼睛，仿佛这些都是他的错。然后，他对我和富克斯说：“除了这一点，我觉得这篇论文不错。”

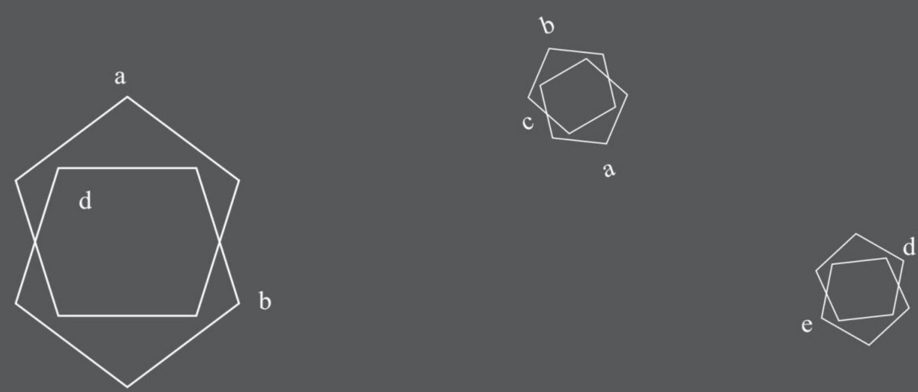
说完这句话，他再次朝我笑了笑，然后转过身跟其他人交谈起来。

这次交流太棒了！等盖尔范德走远了之后，富克斯对我说：

“别担心。他只是想引起你的注意。”（他的确给我留下了深刻的印象！）“我们只需在论文开头加一段话，估计他就会同意发表你的论文。”

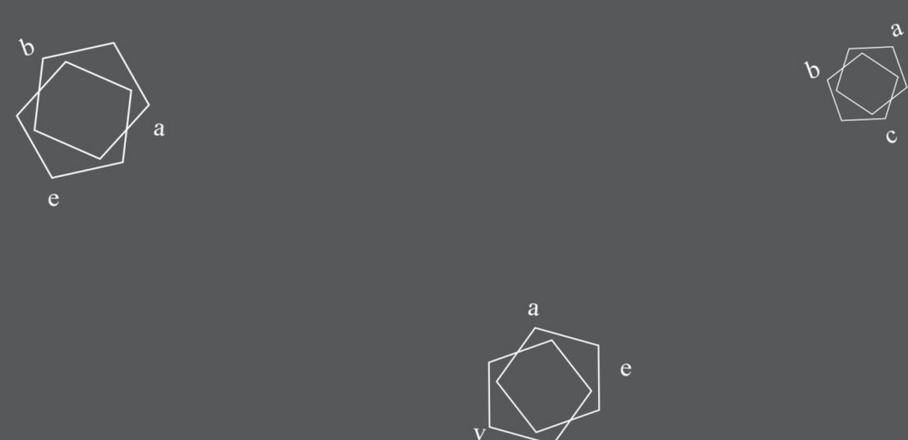
如果真是这样，那就是我最满意的结果了。我按照盖尔范德的要求添加了一段文字，然后正式提交了这篇论文。最后，论文终于发表了，这标志着我参与研究的第一个数学项目圆满结束了。我成功地跨越了第一道门槛，从此踏上了数学研究的征程，展现在我面前的是现代数学创造的一个神秘莫测、蔚为壮观的世界。

现在，我希望与大家一起来探索这个世界。



第 7 章

把一个个小岛连接起来



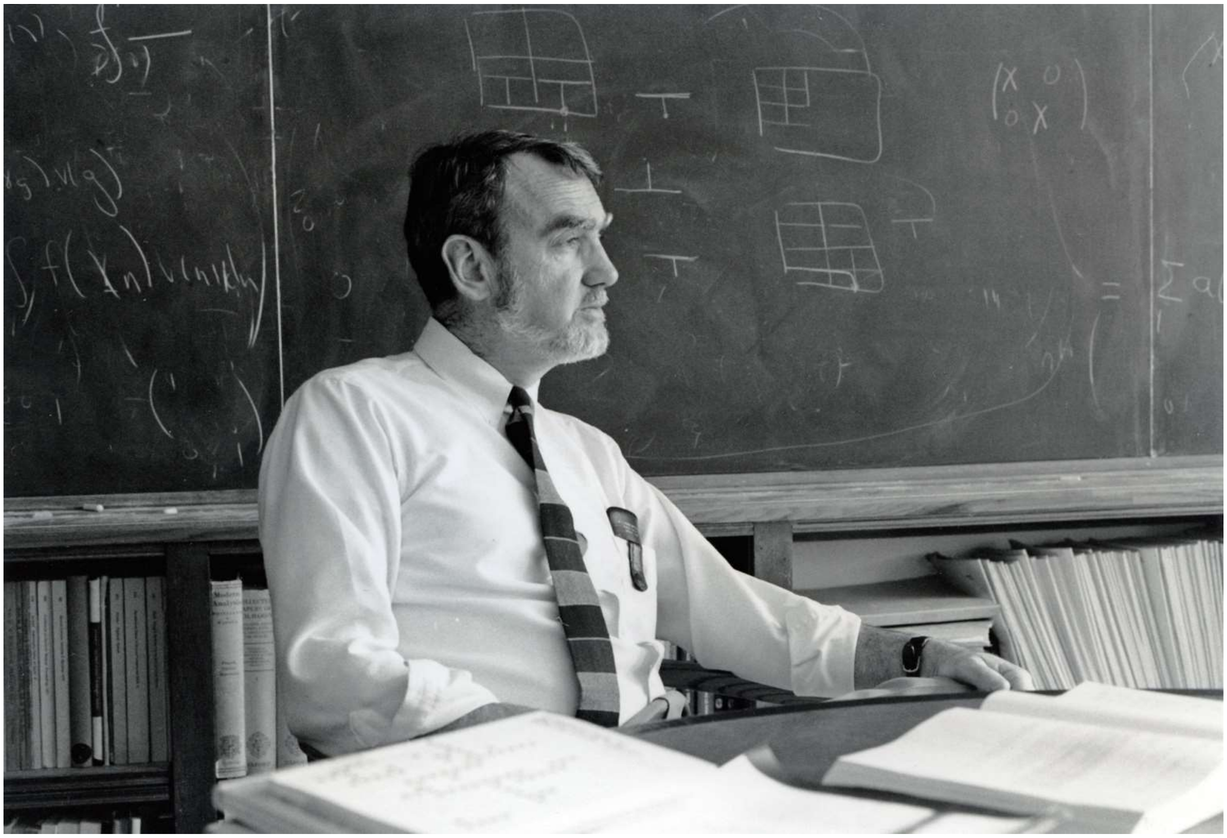
第一次独立解决数学难题的成功经历，具有强大的诱惑力，它引导我正式步入了数学殿堂。不过，我与朗兰兹纲领的接触，则纯属无心插柳。当时，我在富克斯的指导下正在研究我的第二个数学课题，出于研究的需要，我开始钻研这个50年以来最深奥、最令人兴奋的数学理论。后文会谈及我所从事的这项研究，但是本书的写作目的远非介绍我的研究历程，而是要让大家了解现代数学，了解到在数学的世界里，独创性、想象力以及洞察力俯拾即是。朗兰兹纲领就是极为典型的例子。我认为，朗兰兹纲领是数学中的大统一理论，它揭示了数学不同领域的共同规律，把世人的目光聚焦于此，进而深入探究各领域之间不为人知的联系。

数学包含众多分支领域，它们仿佛一块块彼此隔绝的大陆，而人们择善而居，埋头从事各自的研究。这种情形恰恰是“统一”理念大放异彩的原因所在。“统一”理念之所以成形，是因为人们认识到自不同领域中衍生出来的各种理论之间其实有着一脉相承的关系，于是人们把这些理论融合到一起。有了“统一”的理念，我们便如同掌握了另一门语言——一门我们一直在努力学习却收效甚微的语言。

总体来看，数学与大型拼图游戏颇为相似，人们都无法预知它们的结果。不过，数学研究却吸引了数以千计的人为之努力。研究者们分帮结派，各自为政。一些人在研究代数学，一些人在钻研数论，还有一些人在苦苦思考几何问题，不一而足。这些人都在努力完成自己的那部分“拼图”，因此建起了一个个“小岛”。但是纵观整个数学史，在大部分时间里人们无法看出这些小岛之间存在何种关系。大多数人都在研究如何拓展这一个个“小岛”，不过，偶尔也会有人别出心裁地把几个小岛连接起来。此时，数学王国概貌的一些重要表征就会呈现在人们眼前，为各个分支领域注入新的意义。

罗伯特·朗兰兹的贡献就属此类，不过，他的志向远比连接几个小岛更加远大。他于20世纪60年代后期提出朗兰兹纲领，他的目标是寻

求一种方法，帮助人们在众多小岛之间（即便它们之间看似毫无关联），架起连接彼此的桥梁。



1999年，罗伯特·朗兰兹在普林斯顿大学办公室内。图片来源：杰夫·莫佐奇（Jeff Mozzochi）

朗兰兹现在是从普林斯顿高等研究院退休的荣誉数学教授，他使用的是阿尔伯特·爱因斯坦曾经使用的办公室。这位高瞻远瞩的伟大天才生于1936年，他的父母经营了一家木制品厂，他在温哥华附近的一个小镇度过了童年时光。朗兰兹令世人瞩目的特点之一是他的语言天赋，在上大学之前，他只会说英语，但后来却熟练地掌握了法语、德语、俄语和土耳其语等多种语言。

前些年，我有幸与朗兰兹开展了紧密合作。我们经常用俄语通信，有一次，他给我发了个名单，列出了他读过的俄语原版书的作者。这份名单非常长，看来他读过的俄文书籍比我这个俄罗斯人还多。我常想，朗兰兹超凡的语言能力，是否与他那种可以将不同分支数学知识融会贯通的能力有关呢?

* * *

朗兰兹纲领的关键点是我们熟悉的对称概念。我们在前文中讨论了几何中的对称问题，例如，任意角度的旋转都是圆桌的对称操作。通过研究这些对称操作，我们认识了群。随后，我们发现群在数学研究中被披上了各种外衣，变成旋转群、辫群等。我们还发现，群在为基本粒子分类以及预测夸克存在等活动中，也发挥了重要作用。朗兰兹纲领涉及的群还出现在“数字研究”（study of numbers）当中。

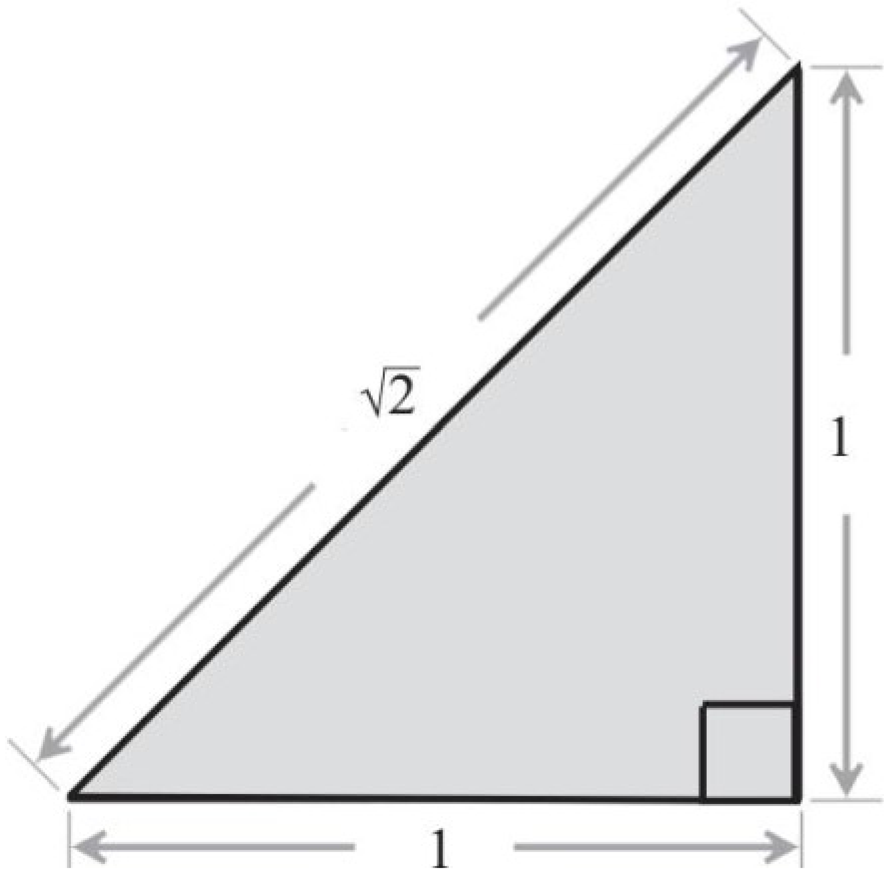
要弄清楚这方面的内容，我们首先要讨论我们在日常生活中经常遇到的数字。我们都出生于某个特定年份，我们的家门上都有一个特定的门牌号，我们都有电话号码，在ATM（自动柜员机）上进行存取款操作时都需要输入密码，等等。所有这些数字都有一个共同特征：每个数字都可以通过数字1自加若干次得到，例如，1+1得到2，1+1+1得到3，如此等等。这些数字叫作自然数。

此外，我们还有数字0，还有负数–1，–2，–3，…。我们在第5章讨论过，这些数字统称为“整数”。所以，一个整数可能是一个自然数，可能是数字0，也可能是一个负数。

我们还会遇到一些使用频率比整数稍高的数字。以美元和美分为单位的商品价格，常采用2.59美元这样的表达方式，意即2美元59美分。这个数字等同于2加上分数59/100，或者2加上1/100的59倍。1/100自加100次后可得到1，这类数字叫作有理数或分数。

1/4这个概念可以很好地表明有理数的特征，1/4的数学表现形式是分数1/4。一般说来，对于任意两个整数m和n，都可以构成分数m/n。如果m和n有一个公约数，比如d（也就是说，$m=dm'$，$n=dn'$），那么我们可以让m和n都除以d，把m/n写成m'/n'。例如，1/4也可以表示成25/100，因此美国人说1/4美元就是25美分。

我们在日常生活中遇到的大多数数字都是分数，即有理数。但是，还有些数不属于有理数，例如2的平方根。我们把这个数字写成2的形式，2的平方等于2。在几何中，2是两条直角边长度为1的直角三角形的斜边长度。



研究表明，我们不能用*m*/*n*（其中*m*、*n*是自然数）的形式来表现$\sqrt{2}$。但是，我们可以用保留了小数点后的几位数字的小数来表现$\sqrt{2}$的近似值，例如，1.4142，1.41421，1.414213，等等。但是，无论我们保留小数点后的多少位数字，这些小数仍然是近似值，后面仍然有更多的数字没有写出来。有限小数无法准确表示$\sqrt{2}$的值。

由于$\sqrt{2}$代表了上图中直角三角形斜边的长度，因此我们可以确定这个数字确实存在，只不过它无法通过有理数这套数字系统表现出来。

这样的数非常多，例如$\sqrt{3}$或者2的立方根。我们需要找出一种系统性的方法，既能表示有理数，还能表示上述这些数字。我们把有理数看作一杯茶，在喝这杯茶时我们可以什么都不加，但是如果我们在其中加入糖、奶、蜂蜜等，喝茶体验到的美妙感觉就会得到提升。把$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$等数字和有理数放到一起，就像把糖一类的调味品加到茶中一样。

我们以$\sqrt{2}$为例，在有理数中加入$\sqrt{2}$的操作，就像在我们的茶中放入一块方糖。接下来，我们来研究这套新的数字系统。我们肯定希望这套系统中的数字可以进行乘法运算，所以该数字系统必须包含所有有理数与$\sqrt{2}$的乘积，其表现形式为$\frac{k}{l}\sqrt{2}$。因此，这套数字系统必须包含所有分数*n*/*m*（有理数）和所有具有$\frac{k}{l}\sqrt{2}$这种形式的数字。此外，我们还希望这些数字可以彼此相加，所以该数字系统还应该包括两数之和：

$$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\sqrt{2}$$

于是，具有$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\sqrt{2}$这种形式的所有数字就可以满足我们的需要了，也就是说，我们可以对其进行所有的常见运算（加、减、乘、除），而且运算结果仍然是这种形式的数字。

研究发现，这套数字系统拥有一个有理数不具备的属性——对称操作。这个属性将成为我们进入这套数字系统所在的神秘世界的大门。

这里的“对称”是指利用一个新的数字为已有的任意数字赋值的规则。换句话说，我们可以利用一个已知的对称操作，把每一个数字转变成同一数字系统中的另一个数字。因此，所谓对称，就是把每一个数字“变成”其他数字的规则，而且该规则应当与加、减、乘、除等运算兼容。现在，我们尚不清楚为什么必须关注数字系统的对称性，但请大家耐心听我解释。

这套数字系统有“恒等对称”（identity symmetry）的规则，即经过操作后每个数字保持不变。该操作就像桌子的0度旋转，在这种情况下桌子上所有点的位置都保持不变。

研究还发现，我们这个数字系统也拥有“非凡对称”（non-trivial symmetry）的规则。我们仍以$\sqrt{2}$为例，$\sqrt{2}$是方程式$x^2=2$的解。的确，当$x=\sqrt{2}$时，方程式平衡。但是，该方程式事实上有两个解：一个解是$\sqrt{2}$，另一个解是$-\sqrt{2}$。在以有理数为基础构建这个新的数字系统时，我们把这两个数字都添加进去了。两个解相互转变，构成这套数字系统的一个对称操作。

为了解释得更充分一些，我们还是用喝茶来做类比，不过需要稍微调整一下。假设在茶水中放入一块白糖和一块红糖，然后搅拌均

匀。白糖代表$\sqrt{2}$，红糖代表$-\sqrt{2}$，显然，若白糖与红糖互换，对茶的口感不会有任何影响。

在互换过程中，有理数保持不变。因此，$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\sqrt{2}$这种形式的数字将会转变成数字$\frac{m}{n}-\frac{k}{l}\sqrt{2}$。换句话说，只需改变2前面的符号，其余部分保持不变。

大家可以看出来，这套新的数字系统与蝴蝶的特点十分相似：$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\sqrt{2}$表示蝴蝶的大小，而$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$互换的对称操作则相当于蝴蝶两只翅膀的对称性。

我们可以进一步延伸，从$x^2=2$转而考虑变量x的其他方程式，例如三次方程式$x^3-x+1=0$。如果此类方程式的根不是有理数（比如上述方程式就属于此类情况），我们就可以把这些根添加到有理数中，我们还可以让几个类似方程式的所有根同时添加到有理数中。这样，我们就可以得到数学家所谓的“数域”（number field）。“域”（field）表示在某一数字系统内对数字进行加、减、乘、除等运算时，该数字系统是“封闭的”（closed）。

与上述通过对有理数添加$\sqrt{2}$得到的数域一样，一般数域都拥有兼容加、减、乘、除等运算的对称操作。同几何体一样，给定数域的对称操作也可以相互结合。因此，这些对称操作自然而然就可以构成群。该群被命名为数域的“伽罗瓦群”（Galois group），以此向法国数学家埃瓦里斯特·伽罗瓦（Evariste Galois，见下图）致敬。



伽罗瓦的故事是有史以来最浪漫也最传奇的数学故事之一。伽罗瓦是一个天才儿童，在很小的时候就取得了一些突破性发现。1832年5月31日，20岁的伽罗瓦死于一场决斗。关于这场决斗的原因众说纷纭，有人认为这跟一位女士有关，有人说这跟他参加的政治活动有关。的确，伽罗瓦敢于表达自己的政治观点，他在自己的短暂人生中确实让不少人寝食难安。

就在他殒命的前夜，伽罗瓦还就着微弱的烛光奋笔疾书，一直到深夜，完成了他的手稿。这份手稿概括性地介绍了他对数字对称性的一些想法，向世人展示出他的一些光芒四射的发现。这实际上是他写给全人类的一封情书。的确，伽罗瓦发现的对称群堪称人类创造的奇观，其意义与埃及金字塔或者古巴比伦空中花园相比也毫不逊色，唯一的区别在于我们无须跨越时空就可以领略其中的美感——无论我们身在何处，伽罗瓦群都触手可及。而且，伽罗瓦群的意义并不仅限于它们那令人神魂颠倒的美感，更在于其巨大的实际应用价值。为纪念他的杰出贡献，这些群被冠以这位数学家的名字。

令人惊叹的是，伽罗瓦远远走在了同时代人的前面。他的想法如此激进，以至于同时代的人根本无法理解。法国科学院两次拒绝发表他的论文，直到大概50年以后，数学家们才认识到它的意义，他的研究成果终于得以出版。当今数学界认为他的这些成果是现代数学的基石。

伽罗瓦做出的贡献，是把我们在几何学中通过直觉认识的对称概念，转变为数论研究中的重要问题，让人们看到了对称的显著作用。

而在伽罗瓦之前，数学家们研究的核心问题则是对$x^2=2$及$x^3-x+1=0$等多项方程式求解，并找出确定的公式。遗憾的是，在伽罗瓦去世已接近两个世纪的今天，学校里教授的数学课程仍然是这些内容。例如，老师要求我们记住二次方程式的通用表达式：

$$ax^2+bx+c=0$$

至于由系数*a*、*b*、*c*构成的求根公式，我不想写出来，以免勾起我不愉快的回忆。在这里，我们只需要知道一点：使用该求根公式需要计算平方根。

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

同样，以上的三次方程式也有一个由系数*a*、*b*、*c*、*d*构成的求根公式，该公式与二次方程式的求根公式形式相似但更为复杂，需要计算三次方根。通过根式（即二次方根、三次方根等）求解多项方程式的做法，随着方程式的次数增加，其求根公式的复杂程度也会显著增加。

早在公元9世纪时，波斯数学家阿尔·花剌子模（Al-Khwarizmi）就已经知道二次方程式的一般求根公式了。“代数”（algebra）这个名称就来自于花剌子模的一本著作，该词的原型是书名中的“al-jabr”一词。16世纪上半叶，人们发现了三次方程式和四次方程式的求根公式。随后，人们很自然地把下一个目标定在找出五次方程式的求根公式上。在伽罗瓦之前，众多数学家都迫切地希望找到五次方程式的求根公式，他们寻觅了近300年，却毫无头绪。而伽罗瓦却发现，这些数学家们没有找到问题的根源所在。他说，把该方程式的根添加到有理数中，就可以得到一个数域，因此，我们的重点应该是研究该数域的对称群——伽罗瓦群。

事实证明，描述伽罗瓦群比写出求根公式要容易得多。无须知道方程的根，我们也能知道有关该群的一些有价值的内容，并据此推断出根的一些重要特征。事实上，伽罗瓦成功地证明，当且仅当相应的伽罗瓦群具有某个特别简单的结构（现代数学家称之为“可解群”）时，以根式（即平方根、立方根等）形式给出的求根公式才存在。对二次方程式、三次方程式和四次方程式而言，伽罗瓦群总是可解群，

因此这些方程式的求根公式可以用根式的形式给出。但是，伽罗瓦还证明出典型的五次方程式（或次数更高的方程式）的对称群是不可解的，这意味着这些方程式不存在以根式形式给出的求根公式。

在这里，我不准备给出详细的证明过程，但是我们可以分析几个伽罗瓦群的例子，以便对这些群有所了解。对于方程式$x^2=2$，我们已经描述了其对应的伽罗瓦群。在这种情况下，我们把该方程式的两个根$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$添加到有理数中，得到一个数域，该数域的伽罗瓦群包含两个元素：恒等元，以及$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$互换的对称操作。

再举一例。对于上文给出的三次方程式，假设其系数都是有理数，但是它的三个根都不是有理数。此时，我们可以把这三个根添加到有理数中，生成一个新的数域。这个过程就好像在茶中添加三种不同的成分，如一块方糖、一些牛奶和一勺蜂蜜。在该数域（添加了上述成分的茶）中的任何对称操作，都不会改变三次方程式，这是因为该方程式的系数都是有理数，在对称操作中保持不变。因此，三次方程式的三个根（茶里的三种成分）必然可以互换。通过观察互换情况，我们可以用三个根的排列组合来描述该数域的伽罗瓦群。该方法的重要意义在于，我们无须任何求根公式，就可以描述伽罗瓦群。

同理，我们也可以把任意多项方程式的所有根（n次多项方程式有n个不同的根，并且不全是有理数）添加到有理数中而生成一个数域，然后用所有根的排列组合，对该数域的伽罗瓦群进行描述。因此，我们无须用系数求出所有根，即可推断出有关该方程式的大量信息。

伽罗瓦的研究充分说明在数学研究当中洞察力的重要作用。伽罗瓦在解决这个问题时，并没有寻找所谓的多项方程式的求根公式，而是将问题层层分解，再重新阐释，采用了迂回包抄、徐徐图之的方

法。他看待问题的异乎寻常的方式，以及深邃的洞察力，彻底地改变了人们对数字和方程式的理解。

150年以后，朗兰兹又进一步拓展了这些想法。1967年，朗兰兹提出了一些革命性的见解，将伽罗瓦群理论与“调和分析”（harmonic analysis）这一数学领域结合起来。他的这些观点表明，两个看上去风马牛不相及的领域之间，其实有着紧密的联系。当时30岁出头的朗兰兹在给知名数学家安德烈·韦伊（A n d ré Wei l）的一封信里，论述了自己的这些想法。当时，这封信的复本在数学界广为流传，该信因其谦逊的笔调而备受关注。

> 韦伊教授，承蒙您邀请面谈，不胜感谢。附件是对本次邀请的回复信，在写完这封回复信之后，我发现信中内容连我自己也不能十分肯定。如果您愿意把它当作我的大胆臆测，且不吝拨冗一读，我将感激不尽。如果您认为这是一派胡言，请直接将它扔进垃圾桶。

书信的附件是一个开创性的理论，它将似乎毫不相干的数学领域连成了一体。自此，朗兰兹纲领诞生了。

好几代数学家前赴后继，奉献出毕生精力，期望能解决朗兰兹提出的这些问题。他们为什么有如此强大的动力呢?

第 8 章
神奇的猜想

在第2章讨论对称时，我们发现，SU(3)群的表示对基本粒子的活动有影响作用。朗兰兹纲领关注的焦点也是群的表示，只不过这里的群是指第7章讨论的数域中的伽罗瓦群。相关研究发现，这些表示可以形成数域的“源代码”，携带有关数字方面的重要信息。

朗兰兹的一些想法非同一般。他认为，我们可以从另一种本质迥异的对象[即所谓的“自守函数”（automorphic function），来源于另一个名为调和分析的数学领域]中提取这些信息。自守函数的本质是对谐波的研究，谐波是一些基本声波，其各自的频率会构成倍数关系。朗兰兹认为，交响乐是由各种乐器演奏的声音所对应的谐波经过重叠而构成的，普通的声音与之相似，也是由谐波经过重叠形成的。在数学上，我们可以将已知函数表示成描述谐波的函数（如正弦和余弦等我们熟悉的三角函数）。自守函数则可以被视为我们更加熟悉的这些谐波的高级版本，在利用自守函数完成计算时可以借助多种分析方法。朗兰兹提出了一个令人瞠目结舌的观点：我们可以利用自守函数来研究难度大得多的数论问题。通过这种方法，我们发现数字谱写出了一个不为人所知的“和声”。

我在前言中说过，数学的一个主要作用是对信息进行排序分类，用朗兰兹的话说，即“从看似杂乱无章的线索中理出头绪”。朗兰兹的理念之所以有非凡的意义，正是因为它可以对数论中看似杂乱无章的数据加以整理，使之形成某种规律，表现出对称性与统一性。

如果我们把数学的不同分支领域看成若干大陆，数论就是北美洲，调和分析则像欧洲。多年的发展让我们往来两大洲所需的时间越来越短。过去，我们乘船需要好多天才能到达；现在，我们坐飞机几小时就到了。但是，想象一下，如果在应用某项新技术之后，我们可以从北美洲瞬时到达欧洲，那将会是什么感觉？朗兰兹发现了这两个数学领域之间的联系，他的发现就有这样的效果。

下面我会讨论其中一个令人震惊的联系，这个联系与我们在第6章中讨论的费马大定理有关。

费马大定理的表述看似非常简单，但却内藏乾坤。

$$x^n+y^n=z^n$$

该定理指出，满足以上方程式的自然数x、y和z不存在，其中，$n>2$。

前文说过，这是法国数学家皮埃尔·费马于1637年提出的一个猜想。他在阅读一本旧书时，在书页的边上空白处留下评注，说他找到了一个“美妙绝伦”的证明这种猜想的方法，但是“页边太小，无法写出证明过程”。我们不妨把这个评注称为17世纪具有“推特”风格的证明过程：“我找到了一个美妙绝伦的证法可以证明这个定理，但是很遗憾，我没法全部写下来，因为证明过程超过了140个字符。”

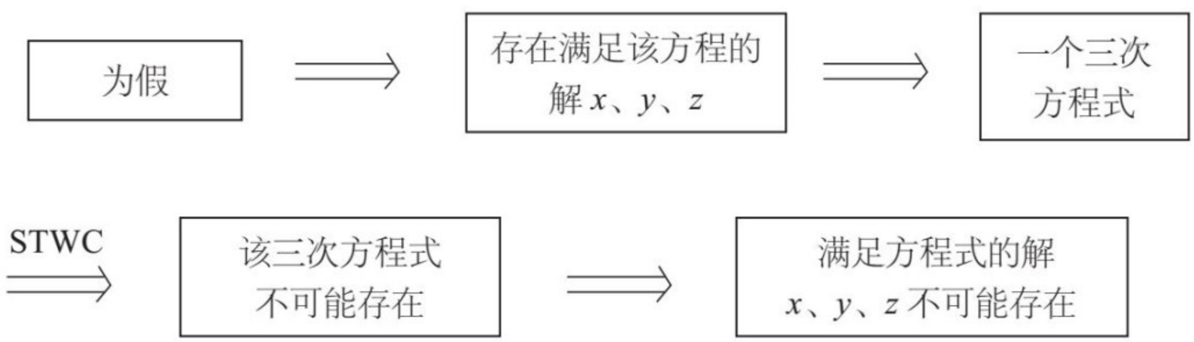
显而易见，费马的证明方法肯定不对。在他之后人们花了350多年才找到真正的证法，而且该证法异乎寻常地复杂。整个历程主要包括两个阶段：第一个阶段是，1986年，肯·里贝特证明费马大定理是志村–谷山–韦伊猜想的必然结果。

（或许，我应该先向大家解释一下猜想这个概念。在数学领域，猜想是指某个人认为某个命题为真，但是尚未找到证明方法。而猜想一经证明，就会转变成定理。）

肯·里贝特的证法指出，如果有自然数x、y、z满足费马方程式，那么我们可以利用这三个自然数构建一个三次方程式，并且该三次方程式具有志村–谷山–韦伊猜想排除的某种属性（我将在下文中解释这个三次方程式和该属性）。因此，如果我们知道志村–谷山–韦伊猜想为

真，那么该方程式不可能存在，我们给出的费马方程的解x、y、z也不可能存在。

让我们稍作停顿，把其中的逻辑再梳理一遍。为了证明费马大定理，我们首先假设该定理为假，也就是说，我们假设存在可以满足费马方程式的自然数x、y、z。然后，我们将这三个自然数与一个三次方程式联系起来，结果发现了某些不合要求的属性。根据志村–谷山–韦伊猜想，我们认为该方程式不可能存在。自然数x、y、z也不可能存在。因此，费马方程式无解，从而证明费马大定理为真！我们可以用示意图表示这一证明过程（图中，“费马大定理”简称FLT，志村–谷山–韦伊猜想简称STWC。



这种证明方法叫作“反证法”。首先假设与我们试图证明的命题相对立的命题为真，以此为证明过程的起点（在本例中，我们假设为真的命题是“存在满足费马方程的自然数x、y、z”，该命题与我们想要证明的命题，即费马大定理对立）。经过一系列推理之后，如果我们假设为真的命题经证明是假命题（在本例中，即“存在一个被志村–谷山–韦伊猜想认定不可能存在的方程式”），此时，我们得出结论：作为证明过程起点的那个命题为假，我们想要证明的命题（即费马大定理）为真。

这样，费马大定理的证明只剩下最后一步需要完成：证明志村–谷山–韦伊猜想。在明白了这个道理（1986年，里贝特的研究完成了这个任务）之后，接下来的研究内容就变成了证明志村–谷山–韦伊猜想。

多年来，人们提出了好几种证法，但是随后的分析表明，这些证法都存在错误或缺陷。1993年，安德鲁·怀尔斯宣布完成了对该猜想的证明，但是几个月之后，人们却发现他的证法存在一个缺陷。在一段时间里，他的证法似乎也沦落到与众多著名的“伪证明”（non-proof）相同的境地：证明中存在缺陷却无法弥补。

但是，怀尔斯比较幸运。他在数学家理查德·泰勒（Richard Taylor）的帮助下，用了不到一年的时间，就弥补了这个缺陷，两个人一起完成了证明。在一部介绍费马大定理的优秀纪录片中，当怀尔斯回忆起这一时刻时仍抑制不住内心的激动，由此我们可以想象这项研究曾给他留下的切肤之痛。

* * *

所以，对志村–谷山–韦伊猜想的证明是费马大定理证明过程中的一个重要成果。这个猜想本身可以被看作朗兰兹纲领的一个特例，清楚地表明在两个看似无关的领域之间，确实存在朗兰兹纲领所预言的各种联系。

志村–谷山–韦伊猜想是关于某些方程式的一个命题。数学领域的很大一部分工作就是解方程式，诸如，我们希望了解某个方程式在特定域内是否有解？如果有解，应当如何求解？如果存在多个解，那么一共有多少个？为什么有的方程式有解，而有的则无解？

我们在上一章讨论了包含一个变量的多项方程式，例如$x^2=2$。费马大定理讨论的方程式含有三个变量：$x^n+y^n=z^n$。志村–谷山–韦伊猜想讨论的则是含有两个变量的代数方程式，例如：

$$y^2+y=x^3-x^2$$

该方程式的解是使方程式左右相等的一组数字x、y。

但是，我们可以从哪种数字系统中找出这样的数字x、y呢？可选答案不止一个：一些人认为x和y可能是自然数或整数；另一些人认为它们可能是有理数。我们还可以在实数，甚至是复数范畴里求解x、y。这个问题，我们将在下一章进行深入讨论。

研究发现，还存在一种另外的可能性。这种可能性不容易被看出来，但是同样重要：我们可以考虑"以N为模"的根x、y，N为自然数。也就是说，我们需要找到整数x和y，使方程式左右两边都能够得到一个能被N整除的数。

例如，我们求模N=5时的根。此时，有一组显而易见的根：x=0，y=0。此外，还有三个隐蔽性略大的根：x=0，y=4是以5为模的方程式的根，因为方程式左边等于20，右边等于0，左右相差20，而20可以被5整除。同理，x=1，y=0以及x=1，y=4也是以5为模的方程式的根。

我们在第2章谈到圆桌的旋转群时，已经讨论过这种算法。当时，我们发现角度的增加是一种"模360度"加法。也就是说，如果两个角度相加的得数大于360度，我们就会从中减去360度，使之落入0度至360度之间。例如，450度旋转与90度旋转是相同的，因为450度–360度=90度。

我们在使用闹钟时也会遇到这种算法。如果我们在上午10点上班，工作时间为8小时，那么我们几点可以下班呢？10+8=18，因此，我们可能会很自然地回答："我们18点下班。"在法国这样回答没有任何问题，因为法国人采用24小时时间制（其实，也并不完全对，因为在法国，每个工作日的工作时间通常不超过7小时）。但是在美国，我们会说："我们下午6点下班。"我们是怎么把18点转换为下午6点的呢？用减法，即18–12=6。

所以，小时与角度的计量在这方面遵循相同的原理。在第一个例子中，我们采用的是"模360度"加法，而第二个例子采用的则是"模12

点”加法。

同理，我们能够以任意自然数N为模进行加法运算。考虑0至N–1之间的所有连续整数集合：

$$\{0，1，2，\ldots N-2，N-1\}$$

如果N=12，这个集合就是由所有整点时间构成的集合。在一般情况下，数字12的任务是由数N完成的，因此，让12变成0的不是12，而是N。

我们将这些数字集合的加法运算定义为与整点时间相同的运算。任意给出该集合中的两个数字，对其进行加法运算，如果和大于N，则从和中减去N，使得数变成该集合中的数字。这种操作使这个集合变成了一个群，其中恒等元为数字0：任何其他数字与0相加之后都保持不变。的确，我们有$n+0=n$。对于该集合中的任意数字n，其“加法逆元”（additive inverse）是$N–n$，因为$n+(N–n)=N$，根据规则，该结果与0相等。

例如，令N=3，我们得到集合{0，1，2}和“模3”加法。例如，我们有：

2+2=1 模为3

在这个系统中，因为2+2=4，但是由于4=3+1，因此数字4在模为3时等于1。

如果有人对你说“2加2等于4”是一个绝对准确的事实，你可以回答他（甚至可以用轻蔑的语气）：“是吗？那可不一定。”如果他们追问原因，你就告诉他们：“在进行模3加法运算时，2加2等于1。”

从上述集合中任选两个数字，我们还可以进行乘法运算。乘积可能不在0至$N–1$之间，但在该范围内应该存在唯一一个数字，它与该乘积的差为某个可被N整除的数。一般说来，集合{1，2，…N–1}不是可以进行乘法运算的群。恒等元的确存在，那就是1，但不是所有元素在模为N时都有乘法逆元。所有元素在模为N时都有乘法逆元的条件是，当且仅当N为质数，即除1与自身以外，不可被任何自然数整除。

前几个质数为2，3，5，7，11，13，……（1通常不包含在内）。除2以外的所有偶数都不是质数，因为它们都可以被2整除；9也不是质数，因为9可以被3整除。质数的数量为无穷多——无论一个质数有多大，总存在一个比它更大的质数。因为质数不可被除1和自身之外的其他自然数整除，所以它们是自然数中的基本粒子。而其他自然数，都可以通过质数乘积的独特形式来表现，例如，60=2×2×3×5。

我们现在选定一个质数，通常我们把它记作p。那么，0至p–1的所有连续整数的集合就是：

$$\{0，1，2，3，4，\ldots p-2，p-1\}$$

我们考虑对该集合进行两种运算：当模为p时的加法和乘法运算。

从上面的讨论可以看出，该集合是可以进行模p加法运算的。更值得关注的是，如果去掉数字0，只考虑1至p–1之间所有的连续整数的集合，即{1，2，…p–1}，我们发现它就是可以进行模p乘法运算的群。元素1是乘法的恒等元（这是显而易见的），而且我可以宣称在1至p–1之间的任意自然数都有一个乘法逆元。

例如，如果p=5，我们发现：

$$2\times3=1 \text{ 模为} 5$$

以及：

$$4\times4=1 \text{ 模为} 5$$

这说明模为5时2的乘法逆元是3，模为5时4的乘法逆元是其自身。研究证明，该结论大体上是正确的。

在我们的日常生活中，我们习惯于使用整数或分数之类的数字。有时，我们也会使用像$\sqrt{2}$这样的数字。但是，我们现在发现了一个本质上截然不同的数字系统，即有穷集合{0，1，2，…p–1}，其中p是质数，我们可以对该集合进行模p加法和模p乘法运算。该集合叫作包含p个元素的有限域。这些有限域是数字世界中非常重要的群岛，但遗憾的是，我们大多数人都没有听说过这样的群岛。

尽管该数字系统似乎与有理数等人们常用的数字系统大不相同，但它们同样具备一些重要的属性：在进行加、减、乘、除运算时，这些系统都是封闭的。因此，那些在有理数系统中可以进行的操作，在这些看上去非常神秘的有限域中同样可行。

事实上，这些有限域已经不像从前那样神秘了。近年来，有限域在实践中，尤其在编码学中，发挥了重要作用。我们在网上购物时，需要输入信用卡卡号。在给信用卡卡号加密时，需要使用模为质数的算法，而决定该算法的函数与上文讨论的函数十分相似。

我们接着讨论三次方程式：

$$y^2+y=x^3-x^2$$

看看模为p（p为变化的质数）时方程根的情况。比如，上文讨论过当模为5时方程式有4个根。但是请注意，当模为其他质数（例如，p=7或p=11）时，方程根的数量未必相同。方程式的根的数量的确取决于我们运算时所取的模p的值。

现在，我们考虑下面这个问题：在模为p时，方程根的数量与p有什么关系？当p的数值不大时，我们可以数出根的具体数量（有时也可借助计算机来计算），并将其绘制成一张不大的表格。

经过一段时间的研究，数学家们已经发现，在模p为数值不大的质数时，方程根的数量接近于p。但根的实际个数与预计的个数（即p）之间存在差异，我们把这种差异定义为a_p。因此，当模为p时上述方程式的根的数量等于$p–a_p$。对于特定的p，a_p可能是正值也可能是负值。例如，上面的讨论表明，当p=5时，方程式有4个根。由于4=5–1，因此a_5=1。

利用计算机，我们可以计算出当p为较小质数时a_p的值。这些值似乎没什么规律可言，计算时似乎也没有确定的公式或规则可用。更糟糕的是，随着p值增大，计算的复杂程度显著增加。

但是，如果我告诉大家有一个非常简单的规则，可以一次性生成所有a_p的值，大家是否会感到吃惊呢？

大家可能很想知道，我这里提到的能生成这些数字的规则到底是什么呢？我们先考虑一个叫作“斐波那契数列”（Fibonacci numbers）的序列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

该数列是一位意大利数学家在1202年出版的专著中提出的，（当时他讨论的是兔子交配问题，没想到吧）因此它以该数学家的名字命名。斐波那契数列在自然界中随处可见：花瓣的排列、菠萝表面的纹理等都包含着斐波那契数列的身影。该数列的其他应用也非常广泛，例如股票交易技术分析中使用的“斐波那契回调”（Fibonacci retracement）。

斐波那契数列的定义是：前两个数字为1，其后每个数字等于前两个斐波那契数字之和。例如，2=1+1，3=2+1，5=3+2，等等。我们把第n个斐波那契数字定义为F_n，则有F_1=1，F_2=1，且：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}，n>2$$

从原则上来说，对于任意数字n，我们都可以运用该规则算出第n个斐波那契数。但是，真想算的话，我们先要算出所有斐波那契数F_i的值（i的值在1到$n-1$之间）。

不过，研究发现，这些数字还可以利用下面这个方法生成。我们看一下下面这个级数：

$$q+q(q+q^2)+q(q+q^2)^2+q(q+q^2)^3+q(q+q^2)^4+\dots$$

用文字表述就是，辅助变量q与表达式（$q+q^2$）的所有幂的乘积之和。去掉括号，就会得到一个无穷级数，其前几项为：

$$q+q^2+2q^3+3q^4+5q^5+8q^6+13q^7+\dots$$

例如，我们计算含有q^3的项。q^3只可能出现在q，$q(q+q^2)$和$q(q+q^2)^2$之中。[的确，求和算式中的其他表达式，如$q(q+q^2)^3$，包含的q的幂都大于3。]三者当中，第一项不含q^3，其余两项各含有一个q^3，因此，它们的和是$2q^3$。我们可以用类似的方式算出该级数的其余各项。

如果分析该级数的前几项，我们就会发现，当n的值在1到7之间时，q^n前面的系数是第n个斐波那契数F_n。例如，该级数有一项为$13q^7$，第7个斐波那契数F_7=13。研究证明，对于所有n，它们都存在这个特点。因此，数学家把该无穷级数称作斐波那契数列的生成函数。

我们可以利用这个重要函数建立一个有效的计算公式，这样一来，无须先算出前面的所有斐波那契数就可以算出第n个斐波那契数。不过，即便不考虑这个生成函数在计算方面的作用，我们也能体会到它的衍生价值：该生成函数无须一个自引用递归程序，就能一次性算出所有的斐波那契数。

* * *

我们现在回过头来，继续研究当模为质数时三次方程式的根的数量a_p。我们可以把这些数字看成类似斐波那契数（尽管我们用质数p标记数字a_p，而用自然数n标记斐波那契数F_n，但是，我们可以忽略这个不同点）的数字。

我们可能会认为，这些数字不应该存在某种生成规则，但是，1954年，德国数学家马汀·艾希勒（Martin Eichler）却对此有所发现。我们来看一下下面这个生成函数：

$$q(1-q)^2(1-q^{11})^2(1-q^2)^2(1-q^{22})^2(1-q^3)^2(1-q^{33})^2(1-q^4)^2(1-q^{44})^2\ldots$$

用文字表述就是，$(1-q^a)^2$形式的因子的乘积再乘以q，a是以n和$11n$这种形式出现的一系列数字，其中n=1，2，3，…。去掉括号，就会得到：

$$(1-q)^2=1-2q+q^2，(1-q^{11})^2=1-2q^{11}+q^{22}，\ldots$$

然后，所有因子相乘，合并同类项，我们就会得到一个无穷级数，其前几项为：

$$q-2q^2-q^3+2q^4+q^5+2q^6-2q^7-2q^8-2q^9-2q^{10}+q^{11}-2q^{12}+4q^{13}+\ldots$$

其中，省略部分代表q的幂为13次以上的后续各项。尽管这是一个无穷级数，但是各项的系数是确定的，因为系数是由上述乘积中有限数量的因子决定的。我们把q^m前面的系数记作b_m，于是有$b_1=1$，$b_2=-2$，$b_3=-1$，$b_4=2$，$b_5=1$，等等。我们可以通过笔算或计算机方便地计算出这些数值。

艾希勒还有一个惊人发现：对于所有质数p，系数b_p都等于a_p。换句话说，即$a_2=b_2$，$a_3=b_3$，$a_5=b_5$，$a_7=b_7$，等等。

比如，我们假设$p=5$，来检验一下上述发现是否为真。此时，我们观察该生成函数就可以发现q^5的系数$b_5=1$。同时，我们已经讨论过当模$p=5$时，三次方程式有4个根。$a_5=5-4=1$，因此$a_5=b_5$成立。

我们开始时讨论的问题似乎极为复杂：当模p为所有质数时，计算三次方程式：

$$y^2+y=x^3-x^2$$

的根的数量。然而，我们现在发现，该方程式的根的所有情况都包含在一个表达式中：

$$q(1-q)^2(1-q^{11})^2(1-q^2)^2(1-q^{22})^2(1-q^3)^2(1-q^{33})^2(1-q^4)^2(1-q^{44})^2\ldots$$

这个表达式就是一个密码，当模为所有质数时，三次方程式的根的数量的信息，全部包含其中。

在研究三次方程式时，我们可以采用的一个有效方法，就是把三次方程式看成一个复杂的有机体，同时把方程式的根看成该有机体的各种遗传特征。我们知道，这些遗传特征都以编码的形式存在于DNA分子中。同样，对于上述这个三次方程式而言，生成函数就像DNA，

包含了该方程式的所有复杂特征。而且，这个生成函数的定义还十分简单。

更让我们惊讶的是，如果q是一个绝对值小于1的数字，上述无穷级数的和就会收敛为一个确定的数字。因此，我们得到一个关于q的函数。而且，研究发现，该函数具有一个非常特殊的属性，即我们熟悉的正弦和余弦函数等三角函数所具有的周期性。

正弦函数sin（x）具有周期性，其周期为2π，也就是说$\sin(x+2\pi)=\sin(x)$，$\sin(x+4\pi)=\sin(x)$，推而广之，对于所有整数n，都有$\sin(x+2\pi n)=\sin(x)$。我们这样设想，每一个整数n都会产生正弦曲线的对称操作，即曲线上的每个点x都会移动到$x+2\pi n$的位置上。因此，整数群可以被视为该曲线的对称群。正弦函数的周期性表明该函数在该群中属于不变量。

同理，研究发现，上述变量q的艾希勒生成函数在某个对称群中也属于不变量。这里，我们不能取q值为实数，而要取复数（我们将在下一章讨论这个问题）。这样一来，我们也不能像在分析正弦函数时那样把q看成线上的一个点，而是将其看成复平面上单位圆盘内的一个点。该点具有对称的属性：在该单位圆盘上存在对称群，而该函数在这个群之内是不变的。具有这种不变性的函数被称作模形式。

该圆盘的对称群内涵丰富，为了解其中的特点，我们来看一下下面这幅图（见下页）。图中的圆盘被分割成无数的黑白三角形。

对称操作通过交换三角形来实现。事实上，对于任意两个三角形，总是存在可互换的对称操作。尽管该圆盘的这些对称操作十分复杂，但我们可以通过类比来了解其中的原理。当整数群作用于正弦曲线时，对称操作的活动区间是$[2\pi m，2\pi(m+1)]$。正弦函数在这些对称操作中保持不变，艾希勒生成函数在该圆盘的对称操作中也保持不变。



我在本章的开头处曾说过，正弦函数是曲线调和分析中所应用的“谐波”（即基本波形）的一个最简单的实例。同样，艾希勒函数以及其他模形式就是单位圆盘调和分析中所研究的谐波。

根据艾希勒的洞见，当模为质数时，三次方程式的根的数量看似毫无规律，但它实际上受到一个生成函数的制约，而该生成函数又遵从一个精致典雅的对称操作的约束，由此可以看出，这些数字中蕴藏着某种和谐与秩序。与之相似，朗兰兹纲领仿佛也具有某种神奇的力量，将数字、对称操作与方程式编织成了一块图案精美的锦缎。

在本书的开头部分，我说某个数学成果“美丽迷人”或者“精致典雅”，也许你会觉得我的说法很奇怪。现在，大家应该能明白我的意思了吧。这些高度抽象的概念竟然如此和谐统一、水乳交融，的确令人叹为观止、难以置信。这种和谐统一揭示了抽象概念背后内涵丰富、神秘莫测的内容，仿佛为我们掀开了一层幕布，一直不为我们所知的神秘存在让我们眼前一亮。这就是现代数学的魅力所在，也是现代世界的神奇所在。

艾希勒的这个数学成果固然拥有与生俱来的内在美，为我们揭示了看似无关的数学领域之间出人意料的联系，但是人们仍不免对其产生一丝疑惑：这个成果究竟有没有实际应用价值呢？有这样的疑问纯属正常。目前我的确不清楚它有哪些实际应用价值，不过，我们上文讨论的在包含p个元素的有限域的基础之上形成的三次方程式（其图像为椭圆曲线），在编码学中得到了广泛应用。因此，如果有一天，人们将艾希勒的研究成果广泛地应用到实践领域当中，并取得像编码算法那样的显著效果，我一点儿也不会感到吃惊。

* * *

志村–谷山–韦伊猜想是艾希勒研究成果的一个推广。根据该猜想，对于类似上文所讨论（这里我们稍加限制）的所有三次方程式，当模为质数时方程式的根的数量都是某个模形式的系数。此外，三次方程式与某种模形式之间存在一一对应关系。

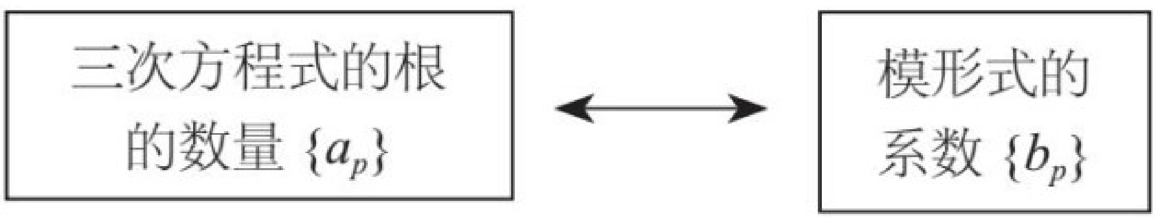
我所说的“一一对应”，指的是什么呢？假设你有5支钢笔和5支铅笔。我们可以为每支钢笔搭配一支铅笔，而且，每支铅笔都只能搭配一支钢笔，这就叫一一对应。

搭配的方法有很多种。但是，假定在一一对应关系中，每一组中钢笔和铅笔长度都相等，那么，我们就把该长度叫作“不变量”，并且

认为这种对应关系可使该不变量保持不变。如果所有钢笔的长度都不一样，那么由该属性确定的对应关系将只有一种。

现在我们讨论志村–谷山–韦伊猜想中的一一对应关系。在构成这种对应关系的两方中，一方是类似于上文所讨论的三次方程式。这些方程式就是“钢笔”，对于每个方程式而言，数字a_p就是它的不变量。（就像钢笔的长度一样，不过现在有不止一个不变量，而是由质数p标记的一系列数字。）

另一方是模形式。这些模形式就是“铅笔”，对于每一个模形式而言，系数$\{b_p\}$就是它的不变量（就像铅笔的长度一样）。



也就是说，对于任意一个三次方程式，总是存在一个模形式，使$a_p=b_p$（p为质数），反之亦然。

现在，我可以解释志村–谷山–韦伊猜想与费马大定理之间的关系了。我们从费马方程式的根入手，先构建一个三次方程式。但是，肯·里贝特证明，当模为质数时该三次方程式的根的数量不可能成为志村–谷山–韦伊猜想所认为的必然存在的某个模形式的系数。一旦志村–谷山–韦伊猜想得到证明，我们就可以断定这样的三次方程式不存在。因此，费马方程式无解。

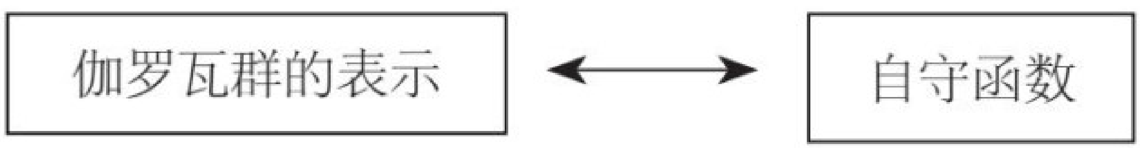
志村–谷山–韦伊猜想是一项非常了不起的成果。数字a_p来源于对当模为质数时方程式的根的数量的研究，属于数论的范畴，而数字b_p则是模形式的系数，属于调和分析的范畴。数论与调和分析这两个领域相去甚远，但是事实证明，两者研究的对象毫无分别！

* * *

将志村–谷山–韦伊猜想稍做变化，把其中出现的每个三次方程式都替换为伽罗瓦群的某种二维表示，它就可以变成朗兰兹纲领的一个特例。我们从该三次方程式可以很自然地得到该二维表示，数字a_p则可以直接被应用到该表示之中（而不是该三次方程式当中）。因此，志村–谷山–韦伊猜想可以表现为伽罗瓦群与模形式的二维表示之间的关系。

大家应该还记得，我在第2章里曾说过，群的二维表示就是用二维空间（即平面）的对称操作为该群的各个元素赋值的规则。例如，我们在第2章里讨论过循环群的二维表示。

推而广之，朗兰兹提出的一系列猜想还可以通过人们意想不到的、更为深奥的方式表现，在伽罗瓦群的*n*维表示（与志村–谷山–韦伊猜想中三次方程式相对应的二维表示的推广）与所谓的自守函数（志村–谷山–韦伊猜想中模形式的推广）之间建立联系。



几乎没有人怀疑这些猜想的正确性，但是，时至今日，虽然好几代数学家在过去的45年里已经为之付出了大量的心血，这些猜想的大多数内容却仍然有待证明。

* * *

也许，大家会觉得奇怪：一开始时数学家是如何提出这些猜想的呢？

这个问题涉及数学洞察力的本质。要培养敏锐的眼光，去发现前人未能发现的规律和联系，需要经年累月的辛勤付出，绝不可能一蹴而就。经过不断努力，你就会慢慢地捕捉到新现象、新理论的蛛丝马迹。刚开始，你也会怀疑自己。之后，你又会想："如果真的是这样呢？"于是，你开始取样计算，检验自己的想法。有时，这些计算很难完成，你必须在大量的复杂公式中摸索前进，一不留神就会犯错误。失败后，你需要换一种方法再尝试。就这样，你不断地犯错误，不断地尝试。

忙活了一天（一个月，甚至一年）之后，你发现自己的想法是错误的，你必须改弦更张、另起炉灶。这样的情况并不少见，失望沮丧的情绪不可避免地涌上你的心头。你觉得自己浪费了大量时间，最终却两手空空，这样的结果实在很难接受。但是，你不肯轻言放弃。你走回制图板前，分析更多的数据，从前面犯下的错误中汲取经验教训，努力找到一个更好的想法。突然有一天，你灵光一现。此时，你必须充分发挥想象力，让思想的浪潮把你带到尽可能远的地方，哪怕你因此得到的想法乍看起来荒诞不经。

志村–谷山–韦伊猜想可能让提出该猜想的数学家本人都觉得不可思议吧，这些想法太疯狂了！的确，该猜想的基础是数学家们在前期研究中已经取得的成果，包括我们在上文中讨论过的艾希勒的研究成果。艾希勒提出，对于某些三次方程式，当模为p时，方程式的根的数量就是某个模形式的系数。他的这个研究成果随后被志村五郎（Goro Shimura）推广到所有的三次方程式中。在当时的人眼中，这个"创举"肯定极为大胆和疯狂。1955年9月，在东京举行的代数数论国际研讨会上，日本数学家谷山丰（Yutaka Taniyama）首次以问题的形式提出这个极为大胆的猜想。

我一直非常疑惑：谷山怎么敢提出这么疯狂的想法呢？在国际研讨会这样的正式场合公开提出这样的想法，他的勇气从何而来呢？

我们可能永远也找不到答案，因为谷山在提出这个伟大的想法之后不久，就于1958年11月自杀身亡了，年仅31岁。这不能不令人扼腕叹息，但更可悲的是，谷山计划迎娶的那位女士也步了他的后尘，结束了自己的生命。她自杀前给世人留下了一纸遗言：

> 我们有过海誓山盟，无论天涯海角，永不分离。现在，他离我而去，我也要离开这个尘世去陪伴他。

此后，志村五郎对这个猜想进行了完善，使之更为精准。志村是谷山的好友兼同事，也是一位日本的数学家，他大部分时间都在普林斯顿大学任职，现在是该校的荣誉教授。志村在数学领域做出了种种重大贡献，其中有很多都与朗兰兹纲领有关，有好几个基本概念都是以他的名字命名的[例如“艾希勒–志村同余关系”（Eichler-Shimura congruence relations）和“志村簇”（Shimura varieties）]。

志村曾写过一篇纪念谷山的文章，在这篇文章中，他对谷山的评价令人难忘。

> 尽管他从不草率行事，但他不断地犯一些小错误。不过，他天赋异禀，所犯错误大多不是方向性错误，也无伤大雅。我对他的天赋颇为仰慕，试图向他学习，结果却发现自己纯属东施效颦。

用志村的话说，谷山在1955年9月的东京研讨会上“提出自己的猜想时，对问题的表述不是非常仔细”，有的地方还需要修改。不过，瑕不掩瑜，谷山的这个革命性洞见引领着数学领域获得了20世纪最为卓著的一个成就。

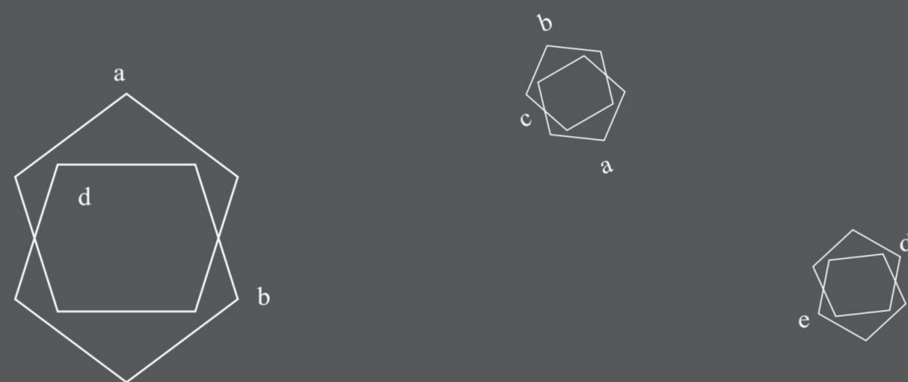
该猜想的名称中使用的第三个人名是安德烈·韦伊。我在前面已经提到过韦伊，他是20世纪数学界的一位泰斗级人物，以睿智著称于

世。韦伊出生于法国，于“二战”期间来到美国。他先是在美国多所大学从事学术研究工作，1958年，他进入普林斯顿大学高等研究院，一直工作到1998年他去世为止，享年92岁。

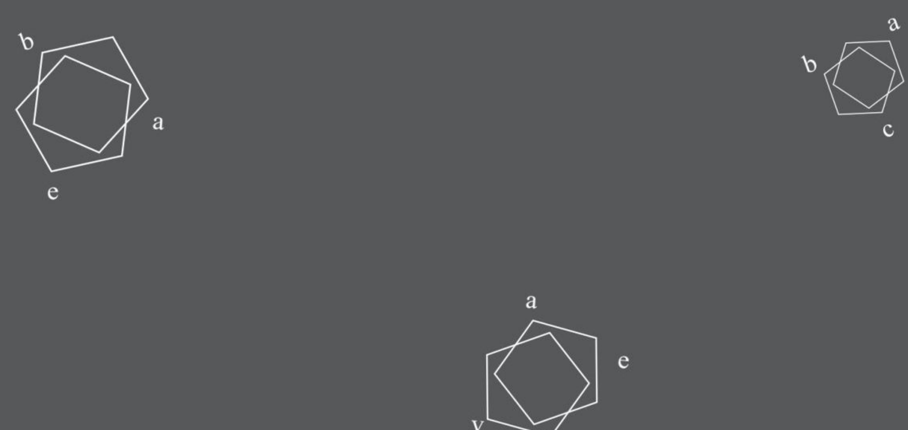


1981年的安德烈·韦伊。照片来源：赫尔曼·朗绍夫（Herman Landshoff），美国新泽西州普林斯顿大学高等研究院谢比·怀特与里昂·莱维档案馆

韦伊与朗兰兹纲领也有着密切的联系。罗伯特·朗兰兹在一封著名的信中首次阐述了他的想法，收信人正是韦伊。此外，韦伊还是志村–谷山–韦伊猜想名称中提及的第三个人。更为重要的是，安德烈·韦伊在给他妹妹的一封信中，对数学“大趋势”进行了深入剖析，借此我们可以更好地理解朗兰兹纲领。我们在下一章中将对此进行讨论，这些内容是把朗兰兹纲领引入几何学领域的桥梁。



第 9 章
现代数学的“罗塞塔石碑”



1940年，安德烈·韦伊因拒绝参战而在法国被捕入狱。《经济学家》（*The Economist*）杂志发表的文章指出：

> 在第一次世界大战期间，“在牺牲面前众生平等”的错误理念，导致法国科学界的大批年轻精英惨遭杀害。法国数学界因此而遭受的惨重损失令韦伊深感悲痛，他坚信自己有义务，不仅是为了他自己，也是为了整个人类文明，把自己的一生奉献给数学研究。他提出，如果不能坚守这个信念，就意味着犯罪。有人提出各种反对理由，诸如“如果每个人都像你这样……”韦伊的回答是，这种可能性几乎没有，因此他根本不会加以考虑。

在狱中，韦伊给妹妹西蒙娜·韦伊（Simone Weil）——一位著名的哲学家和人文主义者——写了一封信，这封信非常重要。他在信中用非常简单的语言（连哲学家都能看懂，开个玩笑）详细地解释了他对数学“大趋势”的理解。韦伊的这个做法堪称典范，值得所有从事数学研究的人借鉴。有时候，我开玩笑说，或许我们应该把顶尖的数学家抓起来，这样，他们就会像韦伊那样，用人们能看懂的语言解释自己的想法。

在信中，韦伊谈到了类比在数学中的作用，并以自己最感兴趣的类比——数论与几何学的类比，来阐明这个问题。

事实证明，数论与几何学的类比在朗兰兹纲领的发展过程中起到了非常重要的作用。我们在前面讨论过，朗兰兹纲领的核心在于数论。朗兰兹设想了一些难度较大的数论问题，例如计算当模为质数时方程式根的数量，可以利用调和分析法。更具体地说，即通过研究自守函数来解决。这个想法具有非常重要的意义：首先，它为我们解决棘手的难题开辟了一个新的途径；其次，这个想法直击不同数学领域间隐藏极深的基础性联系。因此，我们自然备感有趣，希望了解这些不同领域之间到底有什么内在联系，以及为什么存在这种联系。时至

今日，我们仍然没有彻底解决这些问题，就连志村–谷山–韦伊猜想的证明也花费了我们很多时间，该猜想研究的只是一般性朗兰兹猜想的一个特例。而朗兰兹纲领中仍然有成百上千个类似命题有待证明。

因此，面对如此复杂的猜想，我们该怎么办呢？一个可行的办法就是刻苦钻研，努力寻找新的想法和新的深刻见解。当今数学界有很多人正在这样做，他们也取得了一个又一个显著的进展。另一个可行的方法则是拓展朗兰兹纲领的范畴。既然朗兰兹纲领揭示了数论与调和分析的一些基本架构，以及两者之间的联系，那么，很有可能在其他数学领域中也存在类似的基本架构和联系。

研究表明，情况确实如此。人们逐渐意识到，在其他数学领域，如几何学，甚至量子物理，也有可能存在类似的神秘规律。我们在研究某一个领域的规律时，对这些规律在其他领域的意义也会有所发现。我在上文中说过，朗兰兹纲领就是数学中的大统一理论，它揭示了一些普遍现象以及不同领域之间存在的联系。我坚信这是帮助我们理解数学真正内涵的金钥匙，其研究意义远大于朗兰兹猜想本身。

现在，朗兰兹纲领涉及的内容十分广博，一大批人都在为之努力。研究者分属数论、调和分析、几何学、表示理论、数学物理等不同领域，尽管研究的对象各异，但是他们观察到的现象却十分相似。这些现象可以给研究者们提供线索，帮助他们理解这些不同领域之间的关系，从而把这些部件拼成一幅巨大的拼图。

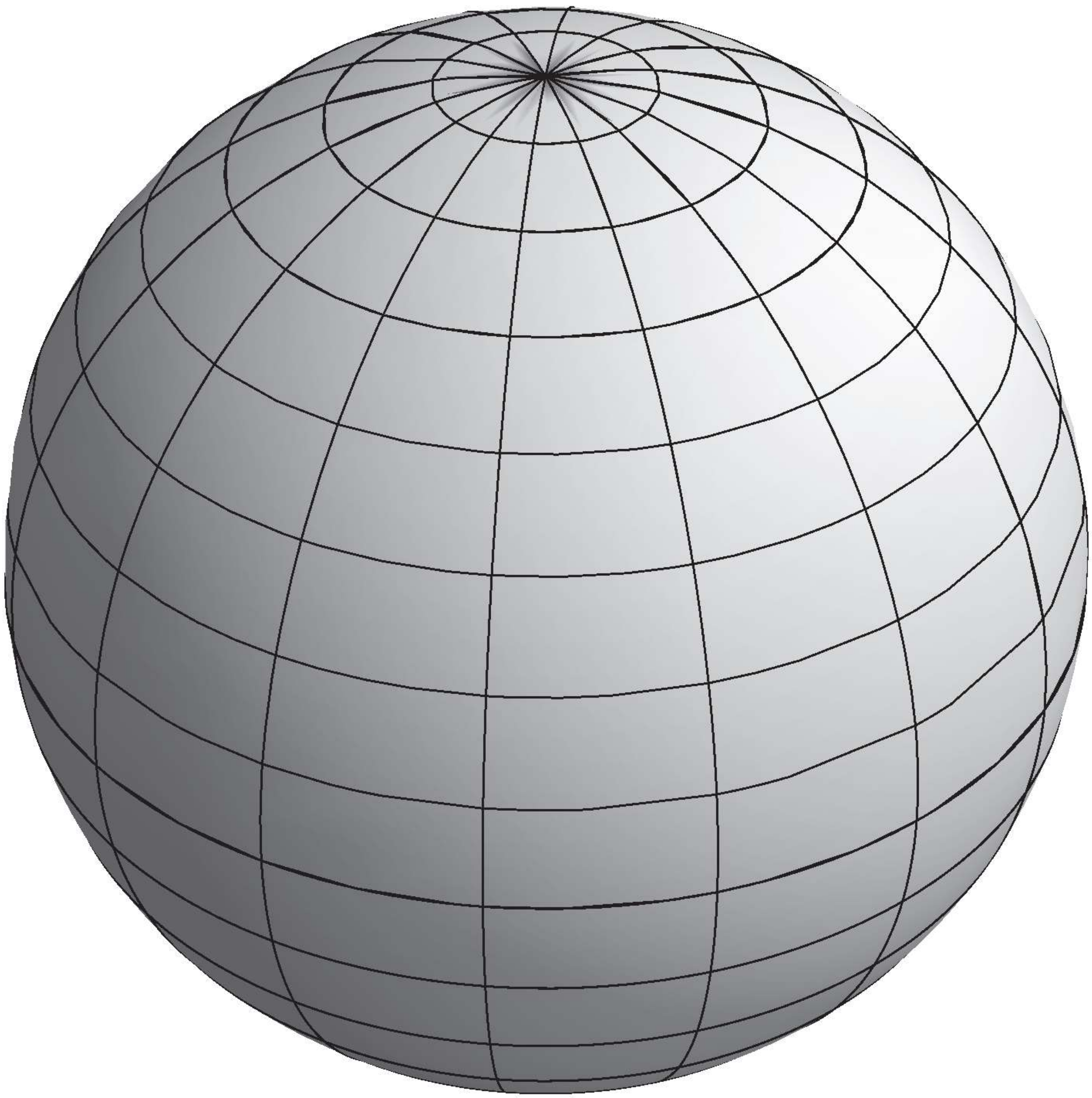
我研究朗兰兹纲领的切入点是“卡茨–穆迪代数”（Kac-Moody algebras，下面几章将做详细介绍）。随着我对朗兰兹纲领的了解不断深入，它在数学上无处不在的影响力让我越发感到心旷神怡、激动不已。

我们可以把现代数学的不同领域看作一门门语言。不同语言中的某些句子，在我们眼中，它们表达的意思是一样的。我们把这些句子

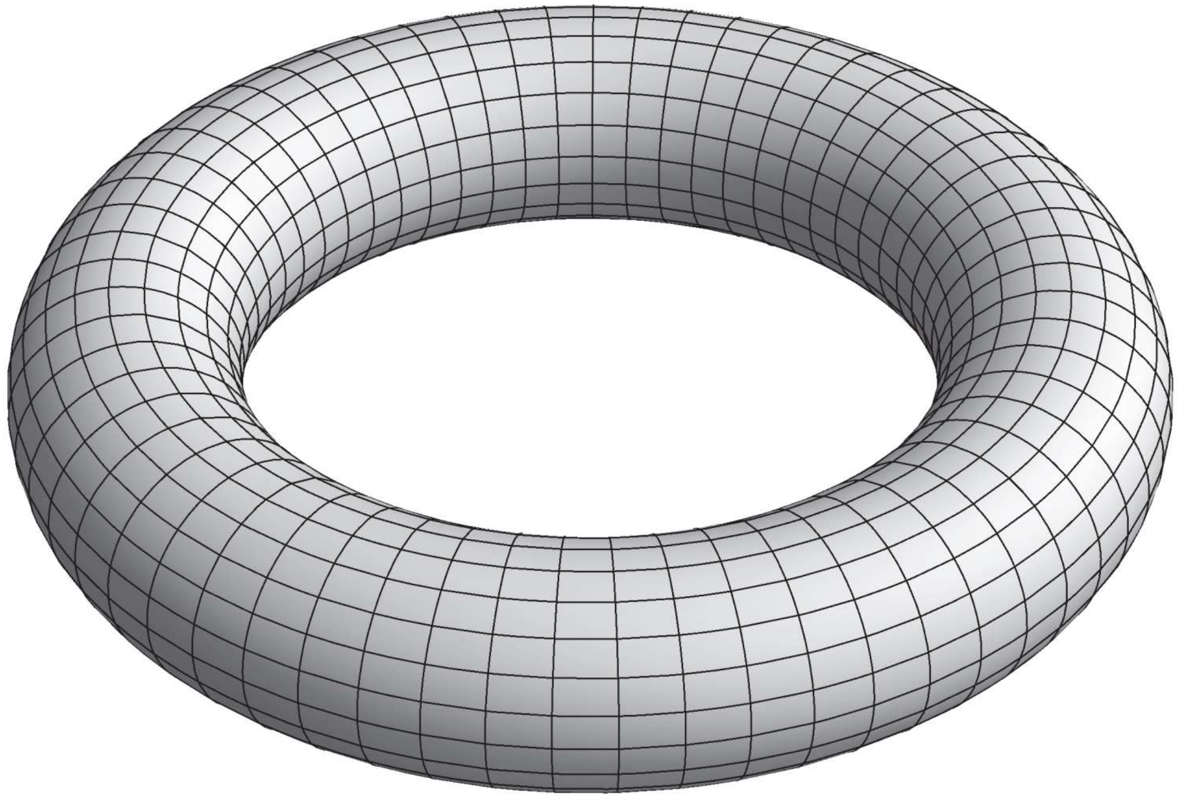
放到一起，不断积累，就能得到一部字典，它可以帮助我们做翻译工作。数学的不同领域的情况与之相似。安德烈·韦伊的那封信就给我们建立了一个合适的框架，有助于我们理解数论与几何学之间的联系。韦伊把这个框架称为现代数学的“罗塞塔石碑”(注)。

一方面，我们把数论领域的一些内容作为研究对象，包括有理数和上一章讨论过的其他数域，例如在有理数中添加2后得到的数域，以及这些数域的伽罗瓦群。

另一方面，我们研究“黎曼曲面”。最简单的黎曼曲面是球面。

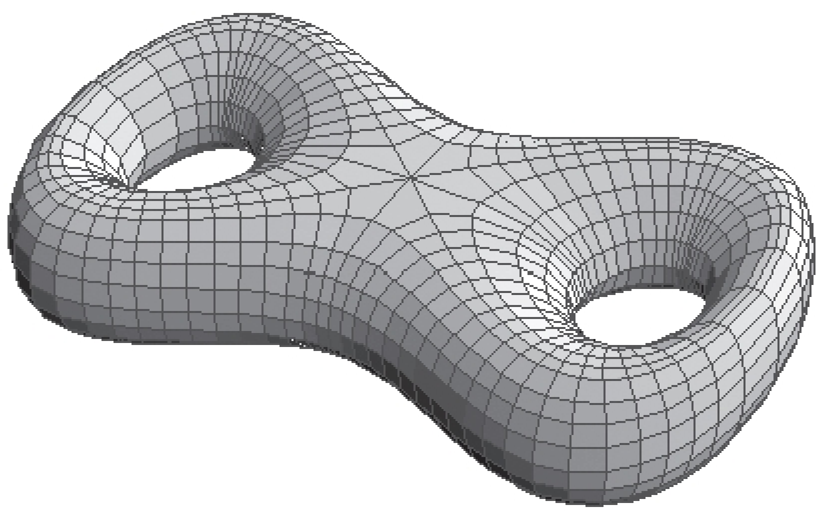


次简单的是环面，即甜甜圈的表面。这里需要强调一点，我们只考虑甜甜圈的表面，而不考虑其内部结构。



还有一种黎曼曲面是丹麦酥皮饼的表面，或者椒盐脆纽结饼的表面，如下图所示（见下页）。

甜甜圈有一个“孔洞”，而丹麦酥皮饼有两个“孔洞”。还有些黎曼曲面有n个孔洞，其中n=3，4，5，…。在数学领域，这些孔洞的数目被称作黎曼曲面的“亏格”（genus）[注]。黎曼曲面是以德国数学家波恩哈德·黎曼（Bernhard Riemann）的名字命名的。黎曼生活于19世纪，他的研究工作为数学领域开辟了若干重要的新发展方向。他的曲面理论，现在被称作黎曼几何，是爱因斯坦广义相对论的基础，爱因斯坦方程式用表示时空曲率的黎曼张量，来描述万有引力。



* * *

乍一看，数论与黎曼曲面毫不相关。但是，研究表明，两者之间存在众多相似性。两者之间还存在另外一类对象，这是理解两者相关性的关键所在。

为了更好地了解这类对象，我们必须清楚，黎曼曲面可以用代数方程式来描述。例如：

$$y^2+y=x^3-x^2$$

我们再次以上面这样的三次方程式为例。前面说过，在讨论这类方程式的根时，必须规定其所在的数字系统。数字系统可以有多种选择，从而引出不同的数学理论。

在上一章，我们讨论了当模为质数时方程根的情况，这是一种数学理论。我们还可以考虑在复数条件下根的情况，这又是另外一种数学理论。在后一种情况下，我们会得到黎曼曲面。

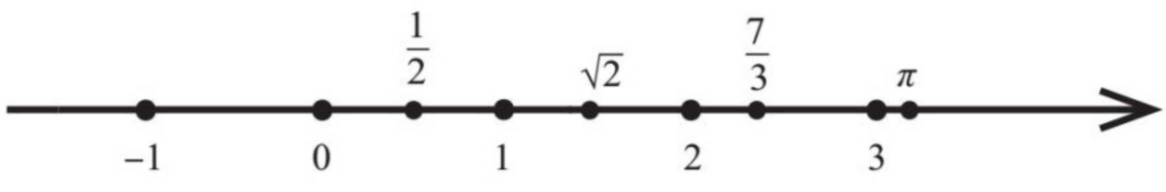
人们经常觉得复数充满神秘感，而且无比复杂。事实上，复数与我们上一章讨论的2的平方根一样，并没有达到无法理解的复杂程度。

现在，我来告诉大家其中的秘密。在上一章，我们在有理数中添加了方程式$x^2=2$的两个根，我们把这两个根记作$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$。现在，我们不讨论方程式$x^2=2$，而是讨论方程式$x^2=-1$。这个方程式看上去比上一个方程式复杂吗？不是的。该方程虽然在有理数范围内无解，但是我们无须担心。我们把该方程的两个根添加到有理数中，并把它们分别记作$\sqrt{-1}$和$-\sqrt{-1}$。它们满足方程式$x^2=-1$，即：

$$\sqrt{-1}^2=-1，(-\sqrt{-1})^2=-1$$

这跟第一个方程式只有细微的差别。数字$\sqrt{2}$不是有理数，但它是一个实数，因此，把它添加到有理数中，所生成的数域仍然属于实数范畴。

我们可以通过下述方式，从几何学的角度来理解实数。画一条直线，在该直线上标出两个点，分别代表数字0和1。然后在1的右侧再标出一个点，使其与1的距离等于0与1之间的距离，该点代表数字2。以同样的方式在直线上标出所有代表其他整数的点。接下来，我们把代表整数的各个点之间的距离进行进一步细分，以表示有理数。例如，数字1/2对应0与1的中点；数字7/3对应位于2和3之间的前处1/3的点，依此类推。现在，我们知道，实数与该直线上的所有点都形成了一一对应关系。



在前文中讨论数字$\sqrt{2}$时，我们用直角边长度为1的直角三角形的斜边长度来表示这个数字。因此，我们在直线上表示$\sqrt{2}$的方法就是在0的右侧找到一个点，使其与0的距离等于该直角三角形的斜边长度。数字π的值等于直径为1的圆的周长，因此，我们可以用同样的方法在直线上标出该数字。

但是，方程式x^2=–1在有理数范围内无解，也没有实数根。这是因为任意实数的平方都是正数或0，而不可能等于–1。因此，与$\sqrt{2}$和–$\sqrt{2}$不同，$\sqrt{-1}$和-$\sqrt{-1}$都不是实数。不过，这又有什么关系呢?我们在前面采取了一些方法，引入了数字$\sqrt{2}$和–$\sqrt{2}$。现在，我们可以采用同样的方法，引入数字–1和—1。同时，在对这些新数字进行运算时，我们也可以采用相同的运算法则。

我们回顾一下前文的内容：我们注意到方程式x^2=2在有理数范围内无解，于是为该方程式创建了两个根，分别记作$\sqrt{2}$和–$\sqrt{2}$，并将其添加到有理数中，从而得到一套新的数字系统（我们称之为数域）。同样，我们在观察方程式^2x=–1时，也发现该方程式在有理数范围内无解，于是我们为该方程式创建了两个根，分别记作$\sqrt{-1}$和–$\sqrt{-1}$，并添加到有理数中。程序完全相同！但是，我们在考虑这套新的数字系统时，为什么会觉得它比包含$\sqrt{2}$的那套数字系统更复杂呢?

之所以产生这样的感觉，是因为我们可以把$\sqrt{2}$表示成一个直角三角形的斜边长度，而$\sqrt{-1}$却不能通过同样直观的几何方式来表示。这种感觉纯属心理作用，因为通过代数的方法，我们可以有效地处理$\sqrt{-1}$，这跟处理$\sqrt{2}$没有什么区别。

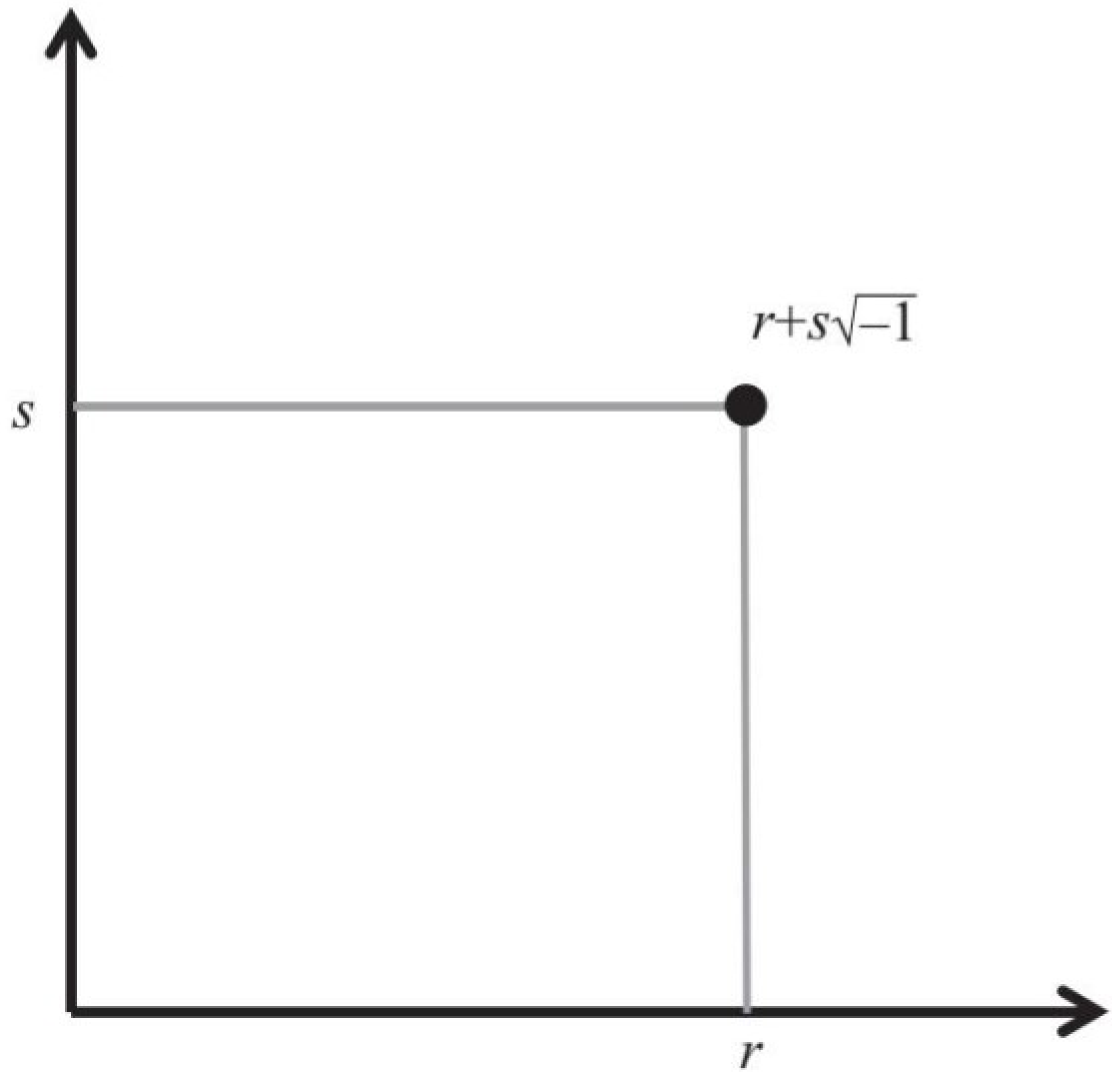
我们把$\sqrt{-1}$添加到有理数中，得到一套新的数字系统。该数字系统的元素叫作复数，其书面表达式是：

$$r+s\sqrt{-1}$$

其中，r和s是有理数。接下来，我们把上述表达式，与前文中提到的添加$\sqrt{2}$后得到的数字系统中的元素的通用表达式进行比较。对于任意两个这样的数字，我们在进行加法运算时，只需要将其中的r部分和s部分分别相加；而在进行乘法运算时，我们可以去掉括号，用$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$这个规则进行运算即可。同样，我们还可以对其进行减法和除法运算。

最后，我们将对复数的定义进行延伸和拓展，允许上述表达式中的r和s是任意实数（而不仅仅是有理数），这样的复数最具一般性。注意，习惯性的做法是把$\sqrt{-1}$记作i[表示“虚构的数字”（imaginary）]，但是我不会这样做。我选择$\sqrt{-1}$这样的表达，目的是强调该数字的代数含义：$\sqrt{-1}$就是-1的一个平方根，与$\sqrt{2}$是$\sqrt{2}$的一个平方根一样。这毋庸置疑，也不像我们想的那样神秘。

我们可以通过几何的方式来表示这些数字，以便了解它们的具体含义。实数可以表示为直线上的点，与之相似，复数也可以表示为平面上的点。也就是说，对于复数$r+s\sqrt{-1}$，我们可以把它表示成由r轴和s轴所确定的平面上的点。



现在，我们回过头来，继续研究三次方程式：

$$y^2+y=x^3-x^2$$

并找出该方程式的复数根。

人们通过研究发现了一个值得关注的事实。该方程式的所有复数根的集合，正好是上文中描述的环面上各点的集合。换句话说，环面上有且只有一组能满足上述三次方程式的复数x、y，反之亦然。

如果你以前没接触过复数，估计现在你已经感到头疼了。这一点儿也不奇怪。理解一个复数就够麻烦的了，现在却要同时理解两个复数，而且这两个复数还是某个方程式的两个根。这些成对的复数与环面上各点的一一对应关系并非一目了然，因此，即使你没有看出来也无须气馁。事实上，对于很多从事数学研究的专业人员而言，要证明这个令人意想不到的“非凡”成果，也不是一件轻而易举的事。

为了让大家确信代数方程式的根与几何图形存在对应关系，我们先来研究一个在实数范围内有解的方程式。这样的方程式比有复数根的方程式简单一些。例如，我们可以考虑下列方程式：

$$x^2+y^2=1$$

我们把该方程式的根以点的形式标在由x轴和y轴确定的平面上，所有根的集合构成以原点为中心、半径为1的圆。由实数变量x和y构成的其他所有代数方程式，其根的集合同样可以在该平面上构成一条曲线。

每个复数从一定意义上讲都是两个实数（每个复数都是由一对实数确定的），因此，此类代数方程式的复数根x和y自然会形成一个黎曼曲面。

除实数根和复数根以外，我们还可以在由{0，1，2，…，p–2，p–1}这些元素构成的有限域中找出根x、y，其中p是质数。换言之，我们将x、y代入方程式，方程式左右两边都会变成整数，而且这两个整数都是p的整数倍。于是，我们会得到数学领域所谓的“有限域平面上的

曲线”。当然，它不是真正的曲线。之所以使用该术语，是因为我们找到的实数根可以在平面上构成曲线。

韦伊敏锐地洞察到，这个领域中最基本的研究对象是代数方程式，如上文所讨论的三次方程式。根据所选取的定义域，同一个方程式可能会表示成几何形式的曲面、曲线或一组点，这些图形只不过是该方程式抽象含义的不同“化身”，就像印度教中的毗湿奴(注)有10个化身一样。巧合的是，韦伊在给他妹妹的那封信里援引了《薄伽梵歌》（人们认为，印度教的这篇经文首先提出了毗湿奴化身说）。韦伊认为，当两种理论间的粗浅类比转化为有形的知识时，就会产生深远的意义。他在信中用富含诗意的语言，描绘了这种转变的结果。

> 这两种理论从此消失于历史的尘埃里，随之而去的是它们留给彼此的痛苦又甜蜜的回忆，欲言又止的羞怯暧昧和莫名其妙的争吵。太棒了，我们只需要面对一种理论了，它气宇轩昂的美感再也不会让我们诚惶诚恐、激动不已。两种理论之间的这种暗通款曲会产生丰硕的成果，给真正的行家带来无与伦比的愉悦……愉悦感来自对意义的错觉和曲解，一旦幻象消失，取而代之的就是知识，我们再也不会莫名兴奋，而是冷眼旁观。《薄伽梵歌》中有一段诗文描述了类似的感受。不过，现在我们还是回过头继续讨论代数方程式吧。

现在，大家应该清楚黎曼曲面与有限域平面上的曲线之间的联系了。两者都来源于同一类方程式，只不过我们所选的定义域不同：有时是在有限域中求解，有时则用复数表示方程根。此外，韦伊在他的信中告诉我们，“数论中的任何求解过程或结果都可以直接理解成”有限域平面上的曲线，也就是说，有限域平面上的曲线是连接数论与黎曼曲面的纽带。

因此，我们找到了连接数论与黎曼曲面的桥梁，或者说“纽带”（韦伊给出的名称），即有限域代数曲线理论。换言之，我们有三组平行轨道。

数论 有限域平面上的曲线 黎曼曲面

韦伊想探索是否有可能从一个轨道中选取某个表述，然后将其转化成另外两个轨道中的表述。他在给他妹妹的信中说：

> 我的研究目的是破译用三种语言写就的文本。在这三个领域中，我只有一些支离破碎的知识。我对这三种语言分别有一些理解，但是我也清楚这三个轨道彼此之间在内涵上存在巨大的分歧，我到目前为止还没有充分掌握这些分歧。经过几年的研究，我只积累了一些知识的碎片，这还不足以编纂出一本完整的翻译字典。

接下来，韦伊致力于研究如何将他的“罗塞塔石碑”付诸实践。他的努力取得了令人叹为观止的成果，我们现在称之为“韦伊猜想”。20世纪下半叶，有关韦伊猜想的证明活动极大地推动了数学的发展。

* * *

我们还是回过头来从朗兰兹纲领说起。朗兰兹最初的想法涉及韦伊的“罗塞塔石碑”左端的轨道，即数论。他在数论的伽罗瓦群表示（这是数论的研究内容）与自守函数（这是调和分析的内容）之间建立了联系。调和分析是与数论相去甚远的数学领域（与“罗塞塔石碑”的另外两个轨道的关系也不紧密）。现在，我们可能会问：如果我们用韦伊的“罗塞塔石碑”中间与右端的两个轨道里的某些研究对象取代伽罗瓦群，是否还能发现这种关系呢?

因为所有必需的成分都已经齐备了，所以将朗兰兹纲领转换到中间轨道上并不是十分复杂。此时，数论的伽罗瓦群应当转换成与有限

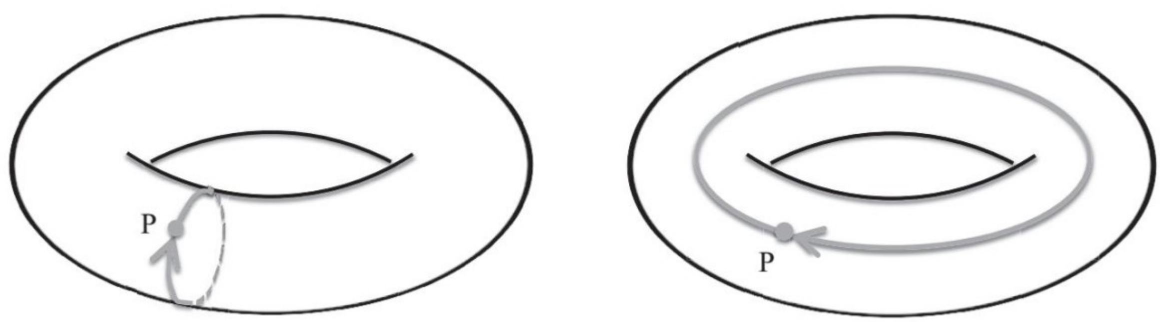
域平面上的曲线相关的伽罗瓦群。调和分析的一个分支研究的就是堪当此任的自守函数。朗兰兹在他最初的研究中，已经在伽罗瓦群的表示与和中间轨道相关的自守函数之间建立了联系。

不过，如何将这种关系发展到“罗塞塔石碑”的右端轨道，人们仍然不知道。为了实现这个目标，我们需要从黎曼曲面理论中为伽罗瓦群与自守函数找到几何学的类比关系。当朗兰兹首次提出他的这些想法时，他已经找到了伽罗瓦群的几何类比关系，但是自守函数的几何类比关系仍然是一个谜。直到20世纪80年代，在俄罗斯杰出数学家弗拉基米尔·德林费尔德的开创性研究的引领下，人们才找到了合适的答案，将朗兰兹纲领发展到“罗塞塔石碑”的第三个轨道上。

我们先从伽罗瓦群的几何类比谈起，伽罗瓦群的几何类比是黎曼曲面的“基本群”（fundamental group）。

基本群是数学分支拓扑学领域中的一个非常重要的概念，其关注的焦点是几何形状的显著特点（如黎曼曲面中“孔洞”的个数）。

我们以环面为例。我们在环面上取一点P，观察从该点开始并至该点结束的闭合路径。我们在下图中展示出两条这样的路径。



同样，任何给定黎曼曲面的基本群都是由该黎曼曲面上自固定点P开始并至该点结束的闭合路径组成的。

已知从固定点P开始且至该点结束的两条路径，我们可以先沿第一条路径，然后沿第二条路径，构建出一条新路径。因此，这条新路径也是从点P开始并至点P结束的。研究证明，闭合路径的这种“加法运算”满足第2章所介绍的群的所有结构特点，因此，我们认为这些路径可以构成群。

大家可能已经注意到一个问题：基本群中路径的加法法则，与我们在第5章中讨论的辫群中辫子的加法法则十分相似。出现这种相似性并非偶然，我们在第5章中解释过，由*n*条线构成的辫子可以被视为*n*个不同点所在空间中的路径。事实上，辫群*B*n正是该空间的基本群。

研究表明，上图所示环面上的两条路径可以互换，即在相加时互换先后次序，而基本群的元素保持不变。因此，环面基本群的一般元素可以通过沿第一条路径运动*M*次、再沿第二条路径运动*N*次得到（*M*、*N*为整数，如果*M*为负数，则沿与第一条路径相反的方向运动*M*次，如果*N*为负数，则操作方式相同）。由于两条基本路径可以互换，因此先后次序并不重要，最后结果也是相同的。

对于其他黎曼曲面，其基本群的结构更复杂。不同路径不一定可以互换，这与辫群的情况相似。我们在第5章中讨论过，在由两条以上的线构成的辫子中，各条线不可以互换。

* * *

人们早已发现，伽罗瓦群与基本群之间具有不小的相似性。因此，我们的第一个问题就迎刃而解了：在韦伊的“罗塞塔石碑”的右端轨道中，伽罗瓦群的类比对象是什么？答案是黎曼曲面的基本群。

接下来，我们需要为自守函数找到合适的类比对象。古老的自守函数概念在数学研究中会带来诸多不便，因此我们需要向前迈一大

步，用现代数学中内涵更深奥的“层”（sheaf）来取代自守函数。我们将在本书的第14章中讨论层的概念。

20世纪80年代，弗拉基米尔·德林费尔德提出用层来取代自守函数。他为朗兰兹纲领建立的新公式，可以被应用到韦伊的“罗塞塔石碑”的中间和右侧（分别涉及有限域平面上的曲线和黎曼曲面这两个轨道，该公式现在被称作“几何朗兰兹纲领”。而且，德林费尔德还为韦伊的“罗塞塔石碑”右侧轨道中的自守函数找到了合适的类比对象。

* * *

1990年春天，我在哈佛大学见到了德林费尔德。他不仅激起了我对朗兰兹纲领的兴趣，还让我认识到自己也可以为它的发展尽绵薄之力。德林费尔德发现几何朗兰兹纲领与我在莫斯科求学期间的研究领域存在着某种联系，因此，我的研究成果在德林费尔德的新方法中起到了极其重要的作用。我的数学生涯也因此发生了巨大的转变，从那以后，朗兰兹纲领成为我的主要研究课题。

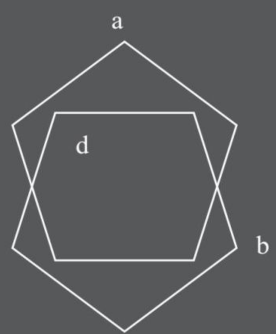
接下来，让我们回到莫斯科，来了解一下在发表了关于辫群的第一篇论文之后，我又取得了哪些新进展。

---

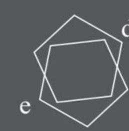
1. 1799年，在尼罗河西河口的罗塞塔附近发现的石碑，其碑文是用象形文字、古埃及通俗文字和希腊文字这三种文字刻成的。1822年，让–弗朗索瓦·商博良（Jean-Francois ois Champollion）对铭文中象形文字的释读使埃及文明的其他许多早期记录得到解释。因此，“罗塞塔石碑”一词常用来比喻或指代“理解疑难问题的关键”。

2. 本书编辑（指英文版编辑）说，他家附近的一家德国酒吧出售的椒盐脆纽结饼有三个孔洞（而且美味可口）。

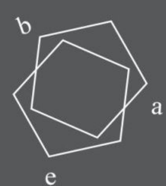
3. 印度教徒认为他已有9个世俗化身，包括罗摩、黑天和历史上的佛；第10个化身将预示世界末日的到来。

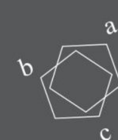


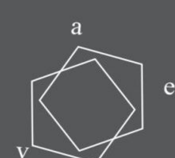




第 10 章
李代数与 n 维空间







1986年秋季，我是莫斯科石油天然气学院的一名大三学生，当时，我已经完成并提交了关于辫群的那篇论文。富克斯问了我一个问题：“接下来你准备做什么呢？”

我想着手研究另一个问题。几年来，富克斯一直与他的一位学生，鲍里斯·费金，一起从事“李代数”（Lie algebras）表示研究。富克斯说这个领域颇具学术研究价值，有大量未解之谜，而且与量子物理关系紧密。

我自然对这个领域非常感兴趣。虽然在叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇的引导下我已经“皈依”数学领域，但是自儿时起对物理学的痴迷依然没有减退。一想到数学和物理学可能会碰撞出火花，我就兴奋不已。

富克斯递给我一篇他和费金合写的研究论文。这篇论文很长，有80页。

“我本来准备给你一本介绍李代数的书，”他说，“不过，我转念一想，为什么不让你看看这篇论文呢？”

我把论文小心翼翼地放进背包。当时，这篇论文还没有公开发表。有幸阅读这篇论文的人屈指可数，费金后来还开玩笑说，我可能是唯一一个通篇阅读这篇论文的人。

论文是用英语写成的，他们俩计划把它发表在美国出版的一部论文集上。但是，由于出版商在运作该论文集时计划不周，最终导致出版时间延误了差不多15年。那时，论文涉及的大部分成果已经在其他地方出现过了，因此，没有多少人读过这篇论文。不过，该论文还是备受肯定，也为富克斯和费金赢得了应有的荣誉。这篇论文被广泛引用，人们甚至由此发明了一个新名词——“费金–富克斯表示”，指称富克斯和费金的李代数表示。

甫一开始阅读这篇论文，我就想到一个问题：“李代数”这个名字好奇怪啊，它是什么东西呢？富克斯在论文里假设读者已经具备相当多的知识，但是其中有很多内容我从未涉猎，因此我跑到书店，把所有关于李代数的教科书全买了下来。买不到的，我就去石油天然气学院的图书馆借阅。就这样，我一边阅读费金和富克斯的这篇论文，一边大量阅读与李代数相关的书籍。这一经历对我的学习风格产生了深远的影响，从此以后，我再也不满足于单一的知识来源，而是广泛搜集各类资料，然后如饥似渴地阅读。

* * *

为了让大家理解李代数的含义，我先要解释一下“李群”（Lie group）这个概念。这两个概念都是以挪威数学家索菲斯·李（Sophus Lie）的名字命名的。

动物世界里有各种动物，同样，数学王国中的各种数学概念也是层出不穷。这些概念彼此关联，形成族群和亚族群。两个不同的概念还经常结合，形成一个新概念。

群的概念就是一个典型的例子。群与鸟存在某种相似性，鸟构成动物世界中的一个类别（我们称之为鸟类）。鸟类可以分成23个目，每目可以进一步分成科，科又可以分成属。例如，非洲鱼鹰是隼形目鹰科海雕属（与这些名字相比，“李群”这个词看起来要简单得多）。同样，群也是数学概念中的一大门类，这个门类又包含着不同的“目”“科”“属”。

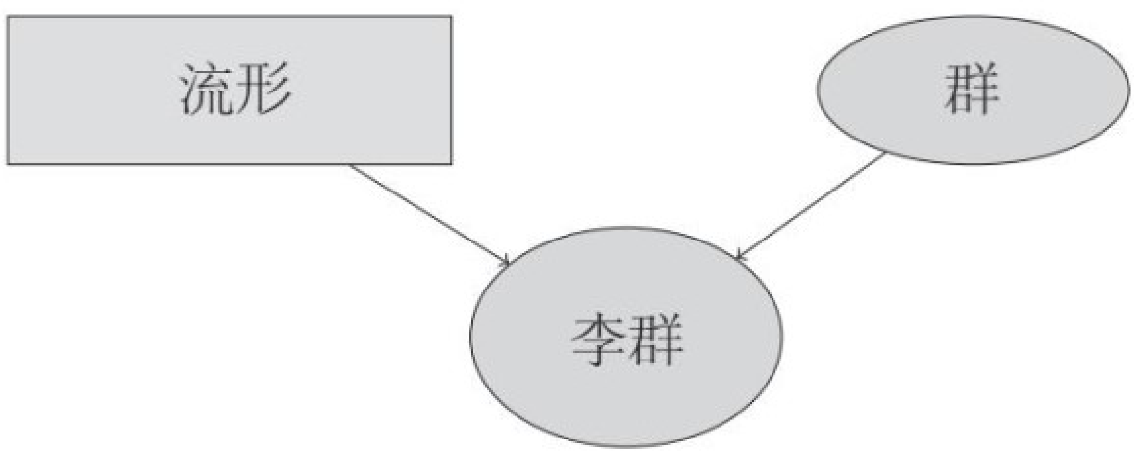
例如，元素个数有限的群可以被视为群这个门类下的一个目。我们在第2章讨论的方桌对称群仅包含4个元素，属于有限群。同样，通过将多项方程式的根添加到有理数中形成的数域，也是有限群（例如，当该多项方程式是二次方程式时，该群包含两个元素）。有限群

这一目还可以进一步分成科，如伽罗瓦群。结晶体群是各种结晶体的对称群，也是有限群的一个科。

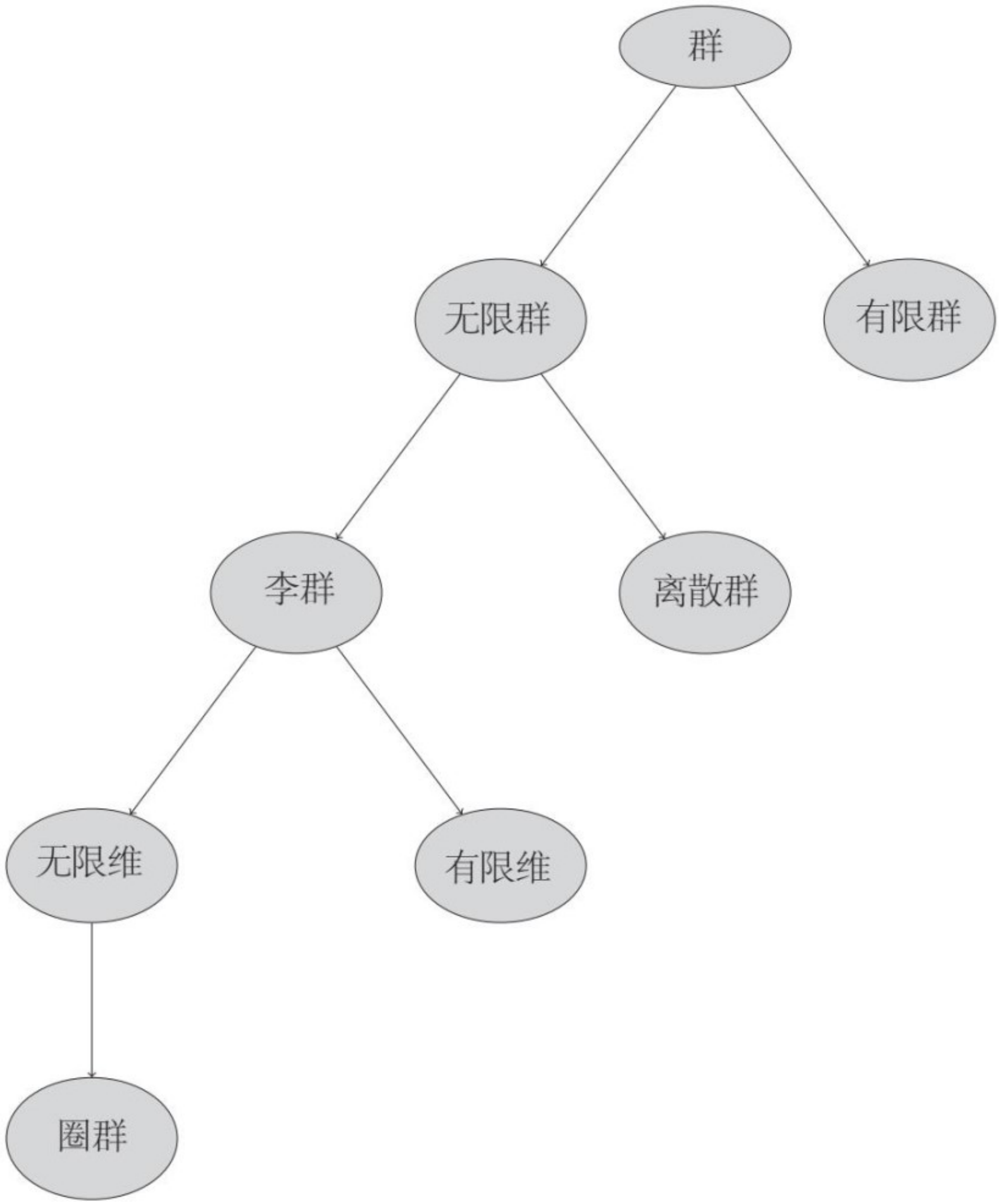
除有限群这个目以外，群这一门类还包含无限群这个目。例如，整数群是无限群，我们在第5章讨论的与数字n对应的辫群B_n（n=2，3，4，...）也是无限群（因为B_n是由包含n条线的辫子构成的，而这样的辫子有无数条）。圆桌旋转群是由圆上所有点构成的循环群，所以它也是无限群。

不过，整数群与循环群之间有一个重要的不同点。整数群是离散的，也就是说，该群中的元素无法相互结合形成任何自然意义上的连续的几何图形。我们不能通过连续的移动方式，而只能通过跳跃的方式，从一个整数到另一个整数。与之相反，我们可以在0度至360度之间连续地改变旋转角度。而且，这些角度可以相互结合形成一个几何图形——圆。数学界把这些几何图形称为“流形”（manifold）。

在数学王国，整数群和辫群均属于离散无限群这个科，循环群和李群则属于另一个科。简言之，李群中的元素是流形上的点。因此，李群是将群与流形这两个数学概念结合起来而形成的一个新概念。



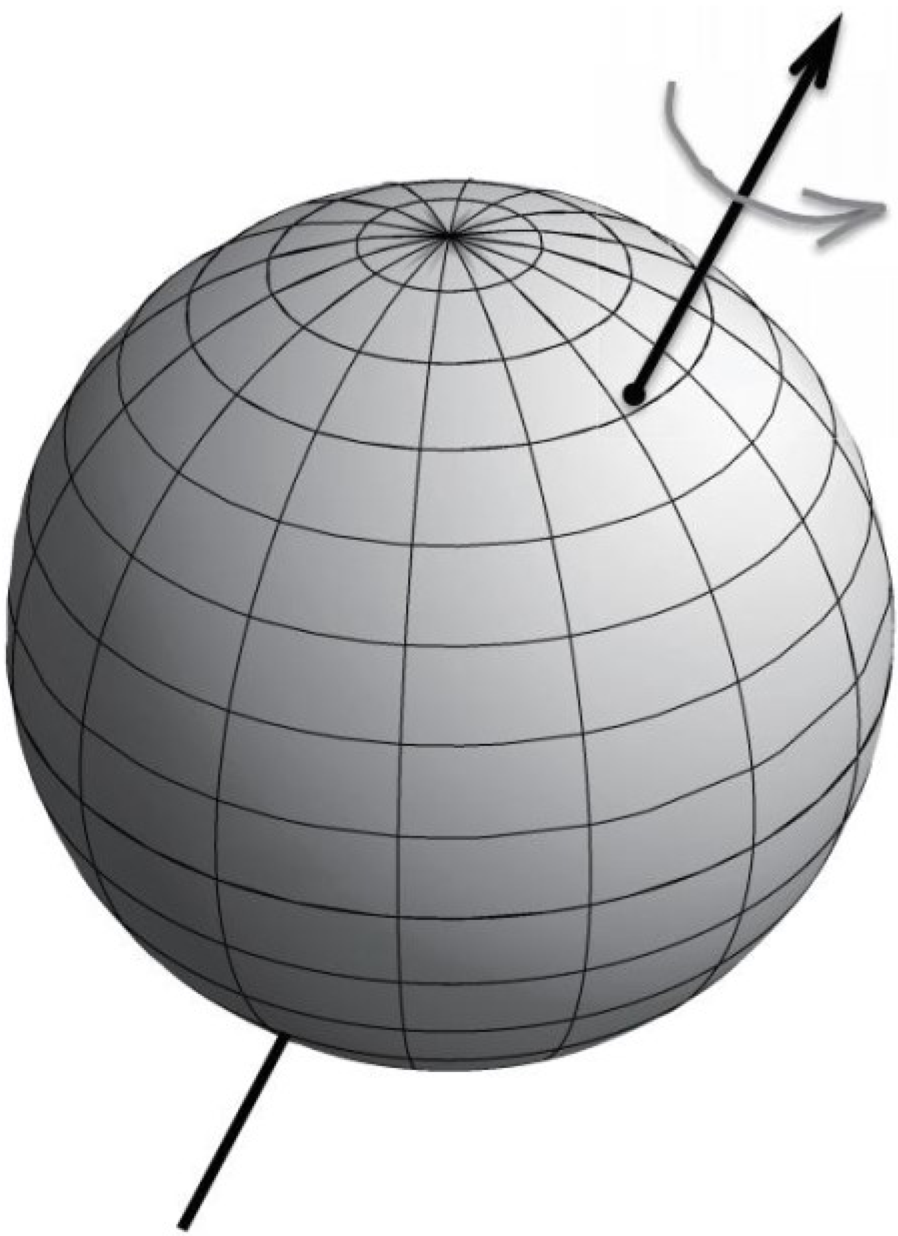
下面这个树形图表示的是本章拟讨论的一些与群相关的概念（有的概念前文尚未涉及，本章将予以讨论）。



李群可以被用来描述自然界中存在的大量对称现象，因此它有非常重要的研究价值。例如，我们在第2章讨论的SU(3)群，就是一个李群。

我们再举一个李群的例子：球体的旋转群。圆桌的旋转操作由旋转的角度确定，但是，如果我们旋转的是一个球体，那么它旋转时的自由度更大。因此，我们必须按下图所示方法，不仅需要规定旋转的角度，还需要规定旋转轴——旋转轴可以是通过球心的任意直线。

球体的旋转群在数学上有一个专门的名称——“三维空间特殊正交群”，通常表示为SO(3)。我们可以把球体的对称操作看成该球体所在三维空间的变换操作。这些变换操作都是正交变换，即所有点的绝对距离保持不变。顺便说一句，这样的操作会得出SO(3)群的三维表示，我们在第2章讨论过这个概念。



同样，上文所说的圆桌旋转群叫作SO(2)群，其中的旋转操作是平面上的特殊正交变换，即二维变换。由此我们可以得到SO(2)群的二维表示。

SO(2)群和SO(3)群不仅是群，还是流形（即几何图形）。SO(2)群是圆，圆是流形，因此，SO(2)既是群又是流形，它还是李群。同样，SO(3)群中的元素是另一个流形上的点，不过这个特点我们不容易直接观察到。（注意，该流形不是球面。）我们在前面说过，球体的每次

旋转都是由旋转轴和旋转角度确定的。现在，我们通过观察发现，球体上的每个点都可以产生一个旋转轴，即该点与球心的连线，而旋转角度只是圆上的一个点。因此，SO(3)群中的元素可以用球面上的一个点（由该点确定旋转轴）和圆上的一个点（由该点确定旋转角度）来共同确定。

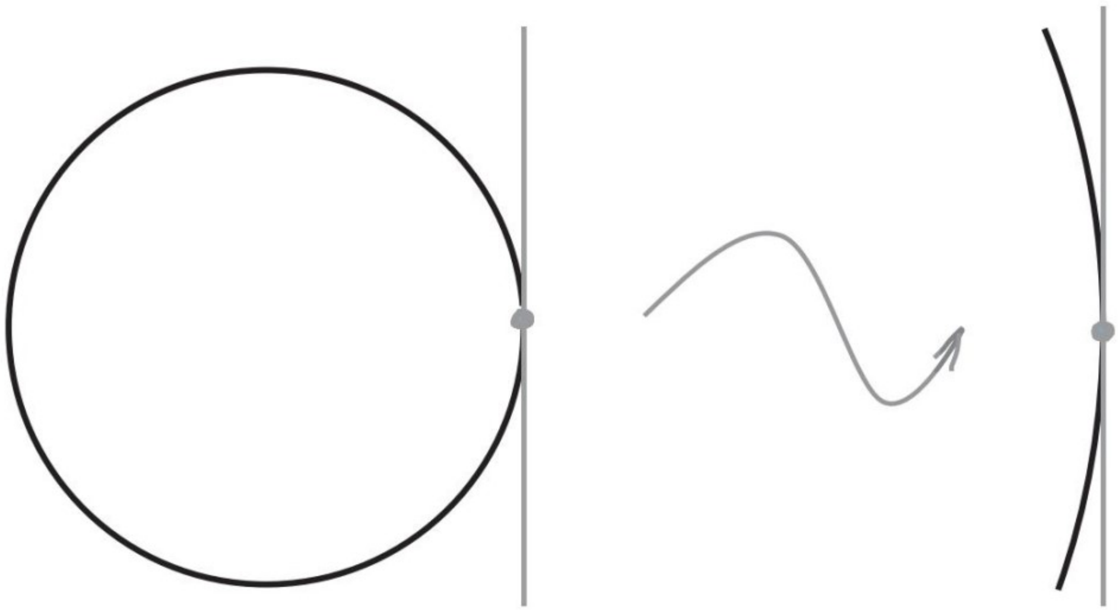
我们在一开始时也许应该先讨论一个比较简单的问题：SO(3)的维数是多少？为了回答这个问题，我们需要更系统地讨论维数的含义。在第2章中我们说过，我们生活的这个世界是三维的。也就是说，当确定空间中某个点的位置时，我们需要规定三个数字或者（x，y，z）。同时我们还知道，平面是二维的，平面上的点用（x，y）就可以确定。直线是一维的，直线上的点只用一个数字就可以确定。

那么，圆的维数是多少呢？我们可能会很自然地认为圆是二维的，因为我们通常是在平面上画圆，而平面又是二维的。如果把圆上各点看作平面上的点，那么我们需要用二维坐标来描述该点。但是，在数学中，已知几何图形（如圆）的维数是指在该几何图形上准确地确定任意点的位置所需的坐标的个数，而与该几何体所在环境（如平面）的维数无关。圆还可以被放到三维空间中（比如人们手上戴的戒指），甚至维数更大的空间中。对于一个具体的圆，圆上任意点的位置可以用一个数字（即角度）来描述，这才是我们需要考虑的因素，它是圆上各点位置的唯一决定因素。因此，我们说圆是一维的。

当然，说到角度，我们必须在圆上挑选出与0度角对应的参考点。同样，为了将x赋值给直线上的各点，我们也需要确定与x=0相对应的参考点。在为给定物体创建坐标时，我们有很多方法。但是，这些坐标所包含的数字的个数都相同，这个数目就被称为该物体的维数。

请注意，随着我们的视线不断拉近，在研究圆上某一点的越来越小的邻域时，圆的曲率几乎可以被忽略。圆上某一点的极小邻域，与

圆的切线上同一点的极小邻域几乎没有区别。圆的切线是切点附近与圆最相似的直线，这表明圆与直线的维数相同。



在我们把某个点放大后观察时，圆与切线之间的距离似乎越来越小。

同样，球面位于三维空间中，但其本身的维数是二。的确，球面有两个坐标数字：经度和纬度。这两个概念，常被我们用来确定地球表面（与球面形状接近）的点的位置，因此我们并不陌生。我们在上图中看到的球体表面的结合部位是由“平行面”与“回转面曲线”构成的，两者分别对应确定的纬度与经度。球面有两个坐标数字，这一事实说明球体是二维的。

那么李群SO(3)呢？SO(3)群中的每个点都是球面的一次旋转操作，因此它有三个坐标数字：旋转轴（由旋转轴在球面穿过的具体点来确定）有两个坐标数字，旋转角度则是第三个坐标数字。因此，SO(3)群的维数为三。

如果李群（或其他任意流形）的维数超过三，情况就会非常复杂。我们的大脑只能想象维数不超过三的几何图形，即流形。想象四维空间，对于我们来说是一项艰巨的任务：我们无法把时间（第四维

度）理解成与空间维度相同的另一个维度。维数更高时会是什么情形呢？我们能分析五维、六维、甚至一百维的流形吗？

我们可以采用类比的方法来理解这类情况。艺术品用二维的方式去表现三维物体。画家在画布上画出目标物体的二维投影，然后用透视法在画作中制造纵深感（第三维）。同样，我们也可以通过分析四维物体的三维投影，来想象这些四维物体。

在想象四维物体时，我们还可以采用另外一种更有效的方法，即把四维物体想象成三维“切片”的组合。这个方法与把面包切成片比较相似。面包是三维的，但是，如果我们把面包片切得非常薄，我们就可以把这些切片看作二维的。

如果第四维度代表时间，那么四维“切片”就是一组组的照片。的确，如果给正在运动中的人拍照，得到的就是四维物体的一个三维切片（随后该切片被投影到平面上），表现出这个人在四维空间中的情况。连续拍摄几张照片，就会得到一组这样的三维切片。如果我们在眼前快速翻动这些照片，就能看到人或物体运动的情况。显而易见，这就是拍摄电影的基本原理。

我们也可以利用照片并置的方式，创造出某种人运动的感觉。20世纪初，艺术家们对这个想法兴趣甚浓，他们利用照片并置，在画作中加入了第四维度，使图片产生了动感。这方面的里程碑式作品之一是马塞尔·杜尚（Marcel Duchamp）于1912年创作的《下楼梯的裸体女人，第2号》。





有意思的是，爱因斯坦在同一时期提出了相对论，证明空间和时间不可分割。该理论将四维时空的概念推至物理学的前沿。与此同时，亨利·庞加莱（Henri Poincaré）等数学家正在深入钻研高维几何的奥秘，并逐步超越了欧几里得的几何学范畴。

杜尚不仅痴迷于非欧几里得几何学，而且对第四维的概念兴趣浓厚。茹弗雷（E. P. Jouffret）在他的著作《四维几何学基础性论文集与*n*维几何学导论》（*Elementary Treatise on Four-Dimensional Geometry and Introduction to the Geometry of n Dimensions*）中，详细地介绍了庞加莱的这一开创性理念。杜尚在阅读该著作时，写下了这样的笔记：

> 四维图案可以留下三维阴影（参见茹弗雷，《四维几何学基础性论文集与n维几何学导论》，第186页，最后三行）……与建筑师绘制楼房设计方案的方法类似，四维图案可以通过三维截面的形式（逐楼层）表示。借助第四维度，不同楼层可结合起来形成楼房的整体结构。

艺术史学家琳达·亨德森（Linda Dalrymple Henderson）认为："新的几何学对那些长期以来广受认可的大量'真理'提出了质疑，杜尚从中受到启发，形成了一些妙不可言的颠覆性观点。"她指出，杜尚与其同时代的艺术家对第四维度的浓厚兴趣，是催生抽象艺术的基本因素之一。

由此可见，是数学帮助艺术找到了创新的突破口。艺术家借助数学知识，看到了隐蔽性极高的新维度，他们深受启发，以摄人心魄的美学形式，表现出现实世界中蕴含的深邃真理。他们创作的现代艺术作品有助于深化我们对现实的感知，影响我们的集体意识，这又对数学界产生了推动作用。自然科学界的哲学家杰拉尔德·霍尔顿（Gerald Holton），对这种推动作用的描述颇有说服力：

> 文化的活力之源就在于不同文化领域的碰撞。碰撞时会产生炼金效应：各种成分融合在一起，淬炼成文化中一颗颗新的宝石。我认为，庞加莱与杜尚对这个问题的看法是一致的。尽管这两个人涉足的领域不同，但毫无疑问，他们在两人都感兴趣的多维空间中发生了这种碰撞。

数学可以帮助我们理解几何学中的所有变化、图形和表现形式。数学是一门通用语言，适用于所有维度的空间，无论我们能否想象出其中的各种物体。同时，数学还能帮助我们超越直观想象的极限。查尔斯·达尔文（Charles Darwin）说得好：数学赋予了我们“新的感官”。

比如，尽管我们无法直接想象四维空间，但是我们可以通过数学的方式实现。我们只需把四维空间中的点表示成四维数组（x，y，z，t）即可，就像我们用三维数组（x，y，z）表示三维空间中的点一样。同理，我们可以把n维平坦空间（n为任意自然数）中的点表示成n维数组（我们在第2章讨论了数据表中的行，对n维空间中点的分析与之相似）。

或许，我应该先解释一下强调“平坦空间”的原因。直线很明显是平坦的，平面同样如此。但是，我们可能很难想象一个平坦的三维空间。（注意：我们在这里讨论的是三维空间本身，而不是三维空间中的各种弯曲的流形。）其实，原因很简单，那就是三维空间没有曲率。在数学上曲率的精确定义比较深奥（该定义由黎曼曲面的创始人

波恩哈德·黎曼给出），且与我们当前的目标关系不大，因此我们略去不谈。我们只需要知道三维空间中有三个无限延伸、彼此垂直的坐标轴，就能很好地理解三维空间的平坦性。同理，n维空间中有n个相互垂直的坐标轴，不存在曲率，因此它也是平坦的。

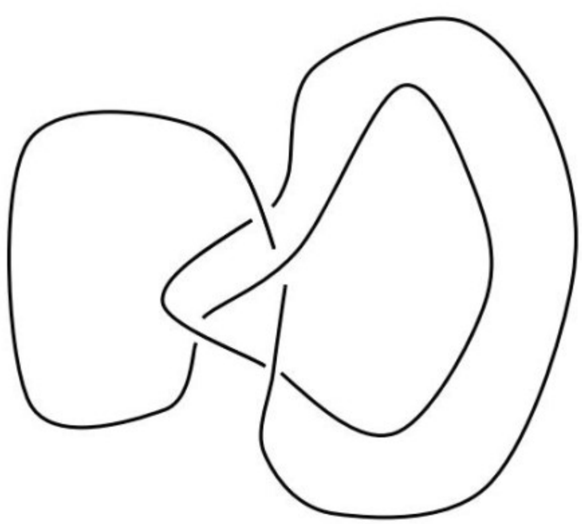
多少个世纪以来，物理学家一直以为我们生存的空间是一个平坦的三维空间。但是，我们在序言中说过，爱因斯坦在广义相对论中指出，万有引力会使空间变弯（曲率非常小，以至于我们在日常生活中注意不到，但是，曲率确实存在）。因此，我们生存的空间实际上是一个弯曲的三维流形。

此时，我们难免会产生疑问：弯曲的空间如何能独立存在，而不像球面存在于一个平坦的三维空间中那样，存在于一个更多维的平坦空间里呢？这是因为我们习惯于认为我们生存的空间是平坦的，因此，根据我们的常识，弯曲的形状似乎只会存在于我们所处的平坦空间之中。但是，这种理解是不正确的，是由我们对现实的狭隘认知造成的。数学可以帮助我们跳出这个认知陷阱。黎曼指出，弯曲空间是客观存在的，是自我形成的产物，并不需要平坦空间去盛放它们。我们在定义这样的空间时，需要完成的任务就是，确定该空间中任意两点间距离的测量规则（这个规则必须满足某些自然属性），数学界把这个规则称作“度量”（metric）。数学领域的度量概念与黎曼提出的曲率张量是爱因斯坦广义相对论的基础。

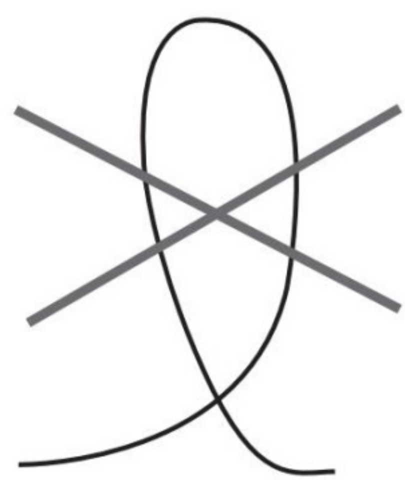
弯曲的形状，或流形，其维数可以是非常大的任意数字。我们讨论过，圆是平面上与某个定点距离相等的所有点的集合。同理，球面是三维空间中与某个定点距离相等的所有点的集合。现在，我们可以把球体的高维类比对象（有人称之为“超球体”）定义为n维空间中与某个定点距离相等的所有点的集合。该定义在该空间的n个坐标轴上都设置了一个限制条件，所以该n维空间中的超球体是（n–1）维物体。此外，我们还可以研究该超球体旋转操作的李群，记作SO（n）。

从数学当中群的分类这个角度来看，李群这一科可以分成两个属，即有限维的李群[如循环群和SO(3)] 和无限维的李群。请注意，所有有限维的李群一定是无限群，因为群中包含着无穷多的元素。例如，循环群含有无穷多的元素（即圆上的所有点），但是，所有元素只用一个坐标轴就能描述，所以循环群是一维群。对于无限维的李群，我们在描述群中元素时需要无穷多的坐标轴。这种“双重无限性”真的很难想象，但是，这样的群确实存在，因此我们需要认真研究它们。接下来，我以圈群为例，为大家描述无限维的李群。

为了让大家理解圈群这个概念，我们先考虑三维空间中的圈。简单地说，圈就是一个闭合曲线，如下图中的左边图形所示。我们在讨论辫群时，就已经遇到过圈（当时，我们称之为“纽结”）了。这里，我要强调一点：非闭合曲线（如下图中的右边图形所示）不是我们要考虑的圈。



这是一个圈



这不一个是圈

我们也可以用类似的方法，去思考任意流形M上的圈（即闭合曲线）。这个圈围起来的空间叫作M的圈空间。

在第17章中将详细讨论这些圈在“弦论”（string theory）中的重要作用。传统的量子物理学的基本研究对象是电子、夸克等基本粒子。这些基本粒子呈点状，无内部结构，也就是说，其维数为零。弦论假定自然界中的基本研究对象都是一维的弦。一条闭弦就是位于流形*M*上的一个圈，因此，圈空间是弦论的基础。

接下来，我们来看一下李群SO(3)的圈空间。该空间的构成元素是SO(3)中的圈，我们仔细研究其中的一个圈。首先，该圈与上图所示的圈非常相似。不过，SO(3)是三维的，所以在它极小时，它是一个三维的平坦空间。其次，该圈上的任意点都是SO(3)的元素，即球体的旋转操作。因此，该圈的含义非常复杂：它是球体旋转操作的单参数集合。如果已知有两个这样的圈，我们就可以把它们对应的球体旋转操作加以结合，从而得出第三个圈。因此，SO(3)的圈空间可以形成群，我们把这个群称作SO(3)的圈群。圈群具有无限维李群的典型特征：我们无法利用有限个坐标数字描述该群的元素。

其他李群[如超球体旋转操作李群SO（*n*）]的圈群也是无限维李群，这些圈群在弦论中是作为对称群出现的。

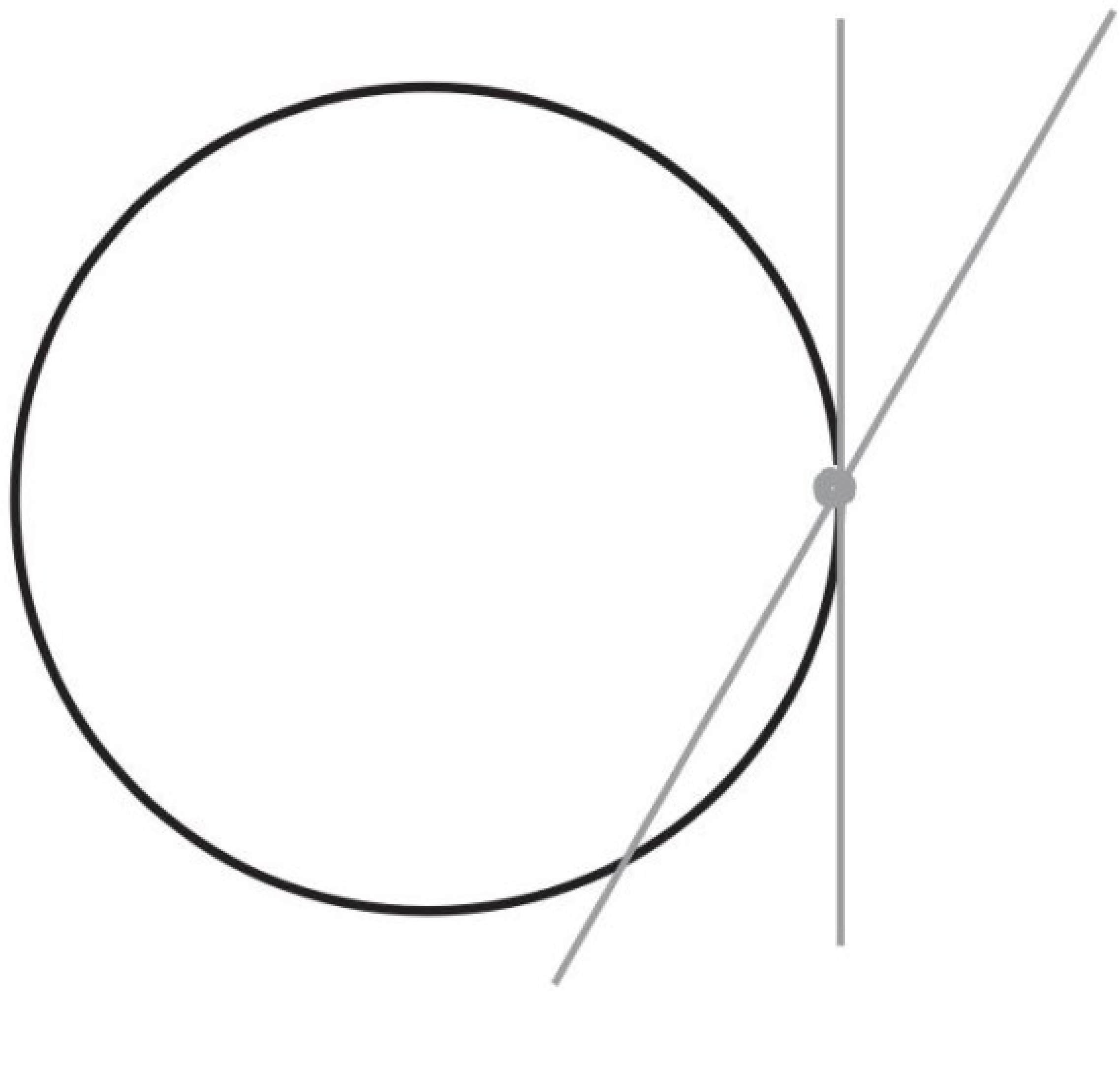
* * *

费金和富克斯合著的这篇论文涉及的第二个概念是李代数。从某些方面来看，每个李代数就是已知李群的简化体。

“李代数”这个术语肯定容易引起误解。当我们听到“代数”这个词时，总会想起中学时学习的那些内容，例如对二次方程式求解。但是，这里的“代数”却拥有不同的内涵：它是名词“李代数”不可分割的一部分，指具有特定属性的数学对象。李群构成群这个类别下的一个科，但是，“李代数”表示的这些对象却构不成代数这个类别下的一个科，尽管这个词本身会给我们这样的暗示。不过，术语的真正内涵与字面意思的不一致性并无伤大雅，我们只要理解和接受就可以了。

要解释李代数，我先要告诉大家“切空间”（tangent space）的概念。当然，我不会文不切题地去讨论切线，而会用叫作“线性化”的微积分概念，即用线性（或者平坦）的形状去近似表示弯曲的形状。

例如，圆上一点的切空间是经过该点的一条直线，是通过该点的所有直线中与圆最贴近的一条。如下图所示，切线只在该点与圆接触，而其他直线还会从圆上的另外一点穿过。



同样，对于任意曲线（即一维流形），切线都可以在已知点附近接近该曲线。1637年，勒内·笛卡儿在他的专著《几何原本》（*Géométrie*）中描述了一种计算这些切线的有效方法。他在书中写

道：“我敢说，在我知道的所有几何问题中，这个问题最普遍，意义最显著，也一直是我渴望了解的。”同样，对于球体，我们可以通过切平面，在某个已知点接近该球体。以棒球为例，我们把棒球放到地上，棒球与地面的接触点只有一个。此时，地面就是该点的切平面。对于一个n维流形，我们也有可能通过一个n维的平坦空间，在某个已知点接近该n维流形。

所有李群上都存在一个特殊的点，即该李群的恒等元。我们找出在该点与该李群相切的空间，这就是该李群的李代数！所以，李代数就像李群的小妹妹一样，每个李群都有自己的李代数。

比如，循环群是一个李群，该群的恒等元就是圆上那个对应0度角的点，而通过该点的切线就是该循环群的李代数。遗憾的是，我们无法用图来表示SO(3)群和它的切空间，因为两者都是三维的。但是，描述切空间的数学理论对于所有维数都适用。如果我们希望了解其原理，我们可以用一维或二维的图形（如圆或球面）作为模型加以想象。这样，我们就可以借助维数较低的流形，去理解更复杂、维数更高的流形。但是，即便这项工作也是多余的，因为我们可以完全借助数学语言，超越直观的限制。在数学上，n维李群的李代数是一个n维平坦空间，它被称作“向量空间”。

此外，李群的乘法运算会衍生出其李代数的一个运算：我们可以用李代数中的任意两个元素结合形成第三个元素。这种运算的特性比李群的乘法运算更难描述，目前我们无须掌握。如果大家学过矢量运算，就会知道三维空间中的向量积运算。看到此类运算，大家可能会觉得它的属性很奇怪。但你可能没有意识到，这类运算的结果实际上是要把三维空间变成一个李代数！

研究发现，向量积运算得到的结果实际上是李群SO(3)的李代数。因此，看上去颇为神秘的向量积运算实际上来源于球体旋转操作的结合律。

大家可能会问，既然李代数的运算如此奇怪，我们为什么还要关注李代数，而不继续研究李群呢？主要原因在于，李群通常是弯曲的（如圆），而李代数通常是平坦的（如直线、平面等），因此相比之下，研究李代数要容易得多。

我们以圈群的李代数为例。我们把圈群的李代数看成圈群的简化体，并以两位数学家的名字把它命名为“卡茨–穆迪代数”（Kac-Moody algebra）。这两位数学家分别是维克多·卡茨（Victor Kac，出生于俄罗斯，后移民至美国，现为麻省理工学院教授），以及罗伯特·穆迪（Robert Moody，生于英国，后移民至加拿大，现为阿尔伯塔大学教授），他们从1968年开始独立研究这些李代数。从那以后，卡茨–穆迪代数成为最受关注、发展最为迅猛的数学理论之一。

* * *

富克斯向我建议，在接下来的研究中，我就以这些卡茨–穆迪代数作为研究课题。但是，我在开始这方面的研究之后，却发现自己掌握的相关知识太贫乏了，就连具体的研究方向也无法确定。不过，我对它的兴趣丝毫没有减少。

富克斯住在莫斯科东北部，他家附近有一个火车站，这个火车站有列车开往我的家乡。那时，我每个周五都会回家度周末，于是富克斯建议我每周五下午五点先去他家，和他面谈，然后再回家。通常，我们会一起探讨问题，时间长达三个小时（期间，他会给我准备晚饭），然后我会乘坐最后一班列车，大概在半夜的时候赶回家。在1986年秋天和1987年春天这两个学期中，我们每周都会见一次面。这段经历在我学习数学知识的过程中起到了极为重要的作用。

1987年1月，我终于读完了费金和富克斯合著的那篇论文，可以着手开展研究工作了。当时，我拿到了莫斯科自然科学图书馆的借阅证。那里有大量的专著和期刊，有的是俄语版（很多俄语资料在石油

天然气学院的图书馆也有收藏），还有的则是用其他语言撰写的。因此，我经常跑到那里，大量阅读数学书刊，搜寻介绍卡茨–穆迪代数以及相关内容的论文。

与此同时，由于量子物理对我有极大的吸引力，我还如饥似渴地钻研了卡茨–穆迪代数在量子物理方面的应用情况。我在前面说过，卡茨–穆迪代数是弦论中的重要内容。其实，卡茨–穆迪代数还可以被用来描述二维量子物理学模型的对称操作。我们生活在一个三维空间中，因此描述这个空间的模型也应该是三维的。再加上时间维度，我们就可以得到四个维度。但是通过数学方法，我们可以自由地为三维以外的其他世界建模，并分析和研究这些模型。维数低于三的模型相对简单，我们成功的可能性相对较高。通过知识积累，我们就可以进一步构建并分析更复杂的三维和四维模型。

我们研究不同维数的模型，可能不是为了将研究结果直接应用于我们这个物理世界，而是为了分享、借鉴这些逼真模型的某些显著特征。实际上，后者才是数理物理学的主要理念。

在这些低维模型当中，有的也可以应用于现实世界。例如，一块非常薄的金属板可以看作二维系统，因此用二维模型去描述它可以取得较好的效果。“伊辛模型”（Ising model）就是一个典型的例子，它描述的是二维网格节点处相互作用的粒子。拉斯·昂萨格（Lars Onsager）提出的伊辛模型解法具有极高的学术价值，可以帮助人们深入了解自发磁化现象，即铁磁性。昂萨格计算法的核心是该模型的一个隐性对称性，这个事实再次说明，对称性在理解物理系统方面具有举足轻重的作用。随后的研究表明，该对称操作可以用所谓的“维拉宿代数”进行描述。维拉宿代数好比卡茨–穆迪代数的“堂兄弟”，费金与富克斯在他们合著的那篇论文中，讨论的主要内容就是维拉宿代数。在这类模型中，有很多都可以借助卡茨–穆迪代数来准确地描述其对称操作。因此，卡茨–穆迪代数理论是理解这些模型的一个重要工具。

* * *

石油天然气学院的图书馆订阅了《参考文献杂志》（*Journal of References*）。这份月刊言简意赅地对新近的以各种语言发表的论文进行评论，并把这些论文按学科分门别类地整理好，还为每篇论文撰写了一个简短的摘要。我定期阅读这份杂志，事实证明，这是一个价值极高的资料来源。该杂志每月会出一期数学论文专刊，我总是认真阅读相关版面，从中寻找自己感兴趣的内容。如果我发现某篇论文可能对我有用，我就会记录下来，下一次去莫斯科自然科学图书馆时就借阅它。就这样，我收集了大量有价值的资料。

有一天，当我正在翻阅《参考文献杂志》时，意外地看到对日本数学家胁本实（Minoru Wakimoto）的一篇论文的评论。胁本实的原论文发表在《数理物理学通信》（*Communications in Mathematical Physics*）上，这是我一直密切关注的一本杂志。评论涉及的内容不多，但是论文题目中提到了与球体旋转群SO(3)有关的卡茨–穆迪代数，于是我记下了这篇论文的出处。下一次去自然科学图书馆时，我借阅了这篇论文。

在这篇论文中，作者针对与SO(3)群相关的卡茨–穆迪代数，别出心裁地提出了一个新颖的实现方式。这里，我用量子物理学的语言说明其要点（因为卡茨–穆迪代数可以描述量子物理模型的对称性）。用于描述基本粒子相互作用的逼真量子模型非常复杂，但是，我们可以将其简化，构建理想化的“自由场模型”，该模型中没有或几乎没有基本粒子的相互作用。这些模型中的量子场是名副其实地处于“自由”状态，彼此间没有发生任何作用。在这样的自由场模型中，我们经常可以实现复杂的也更有价值的研究。因此，我们可以解构复杂模型，完成本来可能无法完成的计算工作。这样的实现方式往往非常有效。不过，对于以卡茨–穆迪代数表示对称操作的量子模型而言，在已知的自由场实现范例中可供选择的范围仍然十分狭窄。

在阅读胁本实的这篇论文时，我立刻意识到他的研究成果可以为我们提供有效的自由场的实现方式，并有助于我们研究与SO(3)有关的最简单的卡茨–穆迪代数。我清楚这个研究成果的重要意义，同时，一些疑问也相伴而来：这种实现方式从何而来？可以将它推广到其他的卡茨–穆迪代数中吗？我意识到，这些问题是比较适合我的研究课题。

大家能想象，当我看到这个令人陶醉的研究成果，以及意识到它的潜在价值时的那种无比激动的心情吗？这种感受就好比在历经千辛万苦的长途跋涉之后，巍峨挺拔的山峰突然映入眼帘。此时此刻，那震撼人心的美令人目瞪口呆，以至于你情不自禁地大叫一声："哇！"在这一刻，你觉得醍醐灌顶、茅塞顿开。虽然你还没有到达顶峰，你还不知道前方有哪些艰难险阻，但是，登顶的吸引力令你无法抗拒，你甚至已经在想象自己站上巅峰时的感觉。顶峰就在那儿，等着你去征服。问题在于：你是否有足够的力量以及足够的毅力去实现目标？

第 11 章

登顶数学险峰

那年夏天，我准备把我的这些发现告诉富克斯。我觉得，胁本实的那篇论文肯定也会让他激动不已。等我到了他的别墅后，他却告诉我出现了一个小小的问题。他的合作伙伴、曾经的学生——鲍里斯·费金和他有一个约谈，刚好也在这一天。富克斯解释说这是他的疏忽，不过我并不相信（后来，富克斯也承认他是故意这样安排的）。

几个月前，富克斯就把我介绍给费金。当时，我已经完成了那篇关于辫群的论文，正在阅读费金与富克斯合著的那篇文章。在一次参加盖尔范德的专题研讨会时，富克斯在活动开始之前介绍我和费金认识。在他的鼓励之下，我请费金为我推荐阅读书目。鲍里斯·利沃维奇（这是我对费金的称呼）当时才33岁，但他已经成为莫斯科数学家中最耀眼的明星之一了。他穿着一条牛仔裤和一双破旧的运动鞋。费金的性格比较腼腆，一副镜片又大又厚的眼镜挡住了他的眼睛。在和我交谈时，他大多数时间都低着头，避免和我对视。不用说，我也同样腼腆，而且自信心不足。毕竟，我还是一名学生，刚刚开始进行数学方面的研究，而站在我面前的却是一位著名的数学家。因此，这次交谈并不顺利。

但是，费金偶尔也会抬起头，用微笑向我表达善意，让我们俩的交流不至于冷场。我能感觉到，他真的很友善。

不过，费金给我提的第一个建议就让我目瞪口呆：他让我阅读列夫·朗道（Lev Landau）与叶夫根尼·栗弗席兹（Evgeny Lifshitz）合著的《统计物理学》（*Statistical Physics*）！这是一本非常厚重的大部头，一想到要阅读这样一本书，我就感到头皮发麻。

事实证明，费金的这条建议是非常恰当的。《统计物理学》这本书的确非常重要，而且最终我还决定把这方面的内容作为我的研究方向（很惭愧，我必须承认我至今还没有读完这本书）。但是，他的建议当时并没有得到我的回应。我们的第一次交流无疾而终，这可能也

是原因之一。从那以后，除了在盖尔范德专题研讨会上碰面时打个招呼以外，我再也没有同费金交流过。

我刚到一会儿，就看到费金也来了，他正在门外停放自行车。我们打了招呼，一番寒暄之后，一起坐到厨房里的一张圆桌旁。富克斯问我："最近你的研究有什么新进展吗？"

"嗯……我发现日本数学家胁本实写的这篇论文挺有意思的。"

"哦……"富克斯转过身问费金，"你知道这篇论文吗？"

费金摇了摇头。富克斯又对我说："什么新东西都逃不过他的眼睛，不过，他没读过这篇论文不是一件坏事，让他听听你的意见也挺好的。"

我开始向他们介绍胁本实的这篇论文。不出意料，他们对它也非常感兴趣。这是我第一次有机会同费金深入探讨数学概念，我立刻觉得我们俩非常合拍。他听得很认真，提出的问题也非常恰当。显然，他了解这些内容的重要性。尽管他看上去是一副漫不经心的样子，我却感觉到了他内心的兴奋之情。富克斯基本上不插话，看到我和费金可以紧密合作，他肯定有一种阴谋得逞的得意，这次交流效果非常好，我隐约感觉到某种重要的东西就在我眼前，似乎触手可及。

富克斯仿佛也有同样的感觉。我离开时，他对我说："干得不错，我多么希望这篇论文就是你写的。不过，我觉得你肯定能更上一层楼。"

回家后，我继续研究胁本实在论文中提出的问题。胁本实仅仅给出了公式，却没有做出任何解释。我要做的似乎就是侦察工作——通过各种蛛丝马迹找出这些公式背后隐藏的惊天秘密。

几天之后，秘密开始浮出水面。那天，我在宿舍里踱步，突然灵光一闪。我发现，胁本实的这些公式来源应该是几何学。这个发现令人震惊，因为胁本实采用的完全是代数方法，看不出任何几何学的痕迹。

为了让大家了解如何从几何学角度来理解这些公式，我们再次对球体对称操作的李群SO(3)及其圈群进行讨论。我们在上一章中解释过，在SO(3)的圈群中，每个元素都是SO(3)群中的元素，SO(3)群中的一个元素对应圈上的所有点。SO(3)群中的每个元素通过特定旋转操作对球体发生作用，这说明SO(3)圈群中的每个元素都会导致球体圈空间的一个对称操作。

我意识到，利用上述信息，我可以得到与SO(3)相关的卡茨–穆迪代数的表示法。不过，这样还得不出胁本实的公式，我们还必须从根本上对这些表示进行修改。打个比方，我们可以把外套翻过来，使衬里朝外。这个动作本身并不难，但是在大多数情况下，衣服就会失去价值，因为我们不能在公众场合反穿衣服。但是，有的衣服有正反两种穿法，胁本实的公式就是这种情况。

有了这种认识之后，我立即着手修改这些公式，使它们适用于其他更复杂的卡茨–穆迪代数。我完成的第一个步骤采用的是几何学方法，跟研究SO(3)群时的情况一样，这一步骤取得了非常好的效果。不过，当我试图把这些公式“翻过来”时，却遇到了麻烦，我发现这样做根本没有什么意义。我翻来覆去地折腾这些公式，始终毫无头绪。我开始怀疑这个公式有可能只适用于SO(3)群，而无法推广至一般性卡茨–穆迪代数。我无法预知这个问题是否有解，即便有解，现有的手段又是否足以求解。因此，我只能疯狂地进行研究，希望能有所收获。

一周之后，又到了与富克斯碰头的日子。我准备把我已完成的计算工作告诉他，寻求他的建议。结果，等我到了他的别墅后，他告诉

我，他的妻子要去莫斯科办事，他得照料两个年幼的女儿，因此无暇与我讨论问题。

“不过，”他说，“费金昨天来过了。你上周告诉我们的那些内容，他非常感兴趣。你可以去找他，他的别墅离这儿只有15分钟的路程。我跟他说过我今天会让你去找他，所以，他现在正在等你呢。”

他给我指了路，然后我就去了。

费金真的在等我，他热情地跟我打招呼，把我介绍给他魅力四射的妻子尹娜和三个孩子。两个充满活力的男孩名叫罗马和热尼亚，他那个可爱的两岁女儿名叫丽莎。我当时完全没有想到，在随后的好多年当中，我会和这一家人保持非常亲密的关系。

费金的妻子给我们准备了茶水和点心，我们就坐在庭院里。那是一个夏天的下午，浓密的树荫下偶尔有一丝光线透射下来，鸟儿那嘤嘤的鸣叫声不绝于耳，周围一派美丽宜人的田园风光。不过，我们的注意力很快就转移到了胁本实的那些公式上。

原来，费金也一直在思考这些公式，而且思路跟我差不多。因此，从一开始的时候，我们一个人说完上句，另一个人立刻就能接出下句。这是一种非常特殊的感觉：他清楚我的每一个想法，我也能听懂他的每一句话。

我告诉费金，我在尝试把这些公式推广到其他卡茨–穆迪代数上时遭遇了挫折。费金认真地听完后，坐在那里静静地思考了一会儿，然后把我的注意力引到了一个被我忽略的重要问题上。在推广胁本实的公式时，我们必须为球面找到一个合适的推广对象，也就是会受到SO(3)群对称操作作用的流形。对于SO(3)群而言，只有一个选择，但是对于其他群而言，可选方案却有很多。我在计算过程中，想当然地认为对球面的推广对象自然就是所谓的“射影空间”（projective

space）。但是，射影空间其实并非唯一的选择，我之所以无法取得进展，可能就是因为没能找到合适的空间。

那天傍晚，我面临的任务就是把这些公式“翻过来”。我期盼着有奇迹发生，在完成上述操作之后，能够得到有意义的结果。胁本实将该公式运用到最简单的SO(3)群上时取得了成功，而我的计算表明，对于射影空间，情况却不是这样。不过，这并不意味着这些公式无法改进，费金建议我不妨试试所谓的“旗流形”（flag manifold）。

SO(3)群的旗流形是大家熟悉的球面，因此，对于其他类型的群而言，它们的旗流形可以看成球面的自然替代品。但是，相比于射影空间，旗流形的内涵更加丰富，用途也更广泛，因此，我们很有可能为胁本实公式找到一个可适用于旗流形的类比结构。

天色不早了，我也该回家了。我和费金约好下周再见，并和他们一家人道别。

我乘坐的火车车厢里几乎没人，夏日的风不停地从打开的车窗里吹进来。坐在车上，我情不自禁地想起那个问题。我抑制不住自己研究的冲动，便掏出纸笔，开始书写适用于最简单旗流形的公式。破旧的车厢一边摇摇晃晃，一边发出断断续续的噪声，我连笔也拿不稳，写出来的公式东倒西歪，连我自己都很难辨认。然而，就在这样混乱的环境中，我竟然逐渐找到了一个规律。此前我尝试用射影空间，但是它们似乎桀骜不驯，现在改用旗流形之后，情况明显变好了。

再进行几步计算，然后……哇，成功了！“翻过来”的公式与胁本实的公式取得了同样效果，这是一次完美的推广。我兴奋地不能自已，太棒了！我成功地发现了卡茨–穆迪代数新的自由场表示！

第二天上午，我认真地检查了计算结果：没有一点儿问题。费金的别墅里没有安装电话，我无法在电话里把我的发现告诉他。于是，

我开始写信，并准备在第二周见面时再告诉他我的新成果。

* * *

从此以后，费金开始了和我的合作研究，他成为我的良师益友。起初，我按照俄罗斯的传统，称呼他为“鲍里斯·利沃维奇”。后来他让我不要太客气，直接称呼他“伯亚”即可。

我在拜师方面的运气真是太好了。叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇帮助我领略到数学的美，让我为之神魂颠倒，他还帮我打下了坚实的数学基础。富克斯把我从莫斯科大学入学考试的那场灾难中拯救出来，使我跌跌撞撞地踏上了数学研究这条大道。他帮助我完成了第一个真正意义上的数学课题的研究，增强了我的自信心，并引导我进入数学与物理相互作用的研究领域。至此，我为将来取得杰出成就做好了准备。伯亚应该是我当时能找到的最优秀的导师。从此，我在数学领域迅速成长起来。

毫无疑问，伯亚·费金是他们那一代人中最有创造力的数学家之一，也是数学领域中嗅觉灵敏的预言家。在他的引领下，我闯进了现代数学这个梦幻仙境，领略了其中神奇与卓越的和谐统一的美。

现在，我有了自己的学生，这让我更加感激伯亚（以及叶夫根尼·叶夫根尼耶维奇和富克斯）为我所做的一切。对学生因材施教并不是一件容易的事。在很多方面，指导学生跟抚养孩子很相似，都必须做出许多牺牲而不求回报。当然，最终也有可能取得丰硕的收获。但是，把学生指向何方，在何时向他们伸出援助之手，又在何时把他们丢进困境让他们学会独立解决问题，这些都是艺术，都需要靠自己摸索，而不能指望别人告诉你。

伯亚非常关心我，同时也很关注我在数学上取得的进展。他从来不会告诉我该做什么，但是同他交流、向他请教总是可以给我指明方

向。不知出于什么原因，伯亚似乎深信我能很好地把握住研究方向。有他从旁指导，我亦总是感到胸有成竹。能够师从伯亚学习数学，我真的是太幸运了。

* * *

此时，1987年的秋季学期已经开始了，这也是我在石油天然气学院的第四个年头。当时，我19岁，觉得生活充满了激情。我仍然住在学校宿舍，与朋友们四处游历，还坠入了爱河……不过，我对学习却从未放松。那时候，大部分的课我都不上，（只是到考试临近时，才偶尔）自学考试内容。各科考试成绩几乎全是A，唯一得B的是马克思主义政治经济学。

大多数人都不知道我还有“第二生活”——跟伯亚学习数学（这项活动占去了我的大部分时间和精力）。

通常，我和伯亚一周见面两次。他的正式工作是在固态物理研究所（the Institute for Solid State Physics）从事研究工作，但是那份工作比较清闲，每周只需去一次即可。平时，他会待在他母亲的公寓里，步行到工作地点只需要10分钟，离石油天然气学院和我的宿舍也比较近。我们通常就在这里见面，我一般会在上午或刚过中午的时候到那儿。我们一起研究课题，有时一研究起来就是一天。傍晚，伯亚的母亲下班后会给我们准备晚饭，我们经常在晚上九十点的时候一起离开那里。

我们当时完成的最重要工作，就是把我们的研究成果进行了简要概括，然后投稿到《俄罗斯数学概观》（*Russian Mathematical Surveys*）杂志。不到一年时间，这篇简短的摘要就得以发表。就在数学杂志上发表文章而言，这样的速度已经相当快了。在完成这项工作之后，我和伯亚又开始考虑进一步拓展这个课题。我们的研究成果显著，开辟了很多新的研究方向。我们利用这些成果去寻找更好的卡茨–

穆迪代数表示，还找到了二维量子模型的自由场实现方法。利用这个实现方法，我们可以在以前无法利用的二维量子模型中完成计算工作。很快，我们的研究就引起了物理界的关注。

那是一段激动人心的美妙时光。不和伯亚见面的那些日子里，我就独自做研究（工作日在莫斯科，周末则在家里）。我仍然会去自然科学图书馆，坚持大量阅读与我的研究方向密切相关的书籍和文章。我沉醉于探索这个美丽的平行世界，而且我乐此不疲。在这个神奇的世界里我不时有新的发现，涌现出新的想法，让我感觉到这就是我的另一个家。

但是，1988年秋天，我进入了大学五年级，这也是我在石油天然气学院的最后一年。我不得不回到现实之中，考虑自己毕业后的安排。尽管我是班上的优等生，但我的前途却是一片黯淡。

第 12 章
数学思维的力量

尽管我清楚莫斯科学术界不会有我的一席之地，但是我仍然一如既往地努力钻研数学。马克·索尔在他的文章中说（他称呼我时用了我名字的缩写——埃蒂克）：

> 埃蒂克等人坚持不懈地探索，就像一群逆流而上的鲑鱼。他们的动力从何而来呢？种种迹象表明，他们在大学时遭遇的歧视不会停止，而且肯定会影响他们的职业生涯。如果他们希望以数学研究作为职业，获得成功的可能性将非常渺茫。在这样的情况下，他们不但没有放弃，反而孜孜不倦地做着准备。为什么？

因为我并不期望得到任何回报，我只是单纯地追求知识带给人的乐趣和激情。我希望把自己的毕生精力都奉献给数学，原因就在于我热爱这项事业。

不过，仅有激情和乐趣是不够的，我确实还需要一份工作。因此，我一方面在私下里与伯亚合作，完成我的主要工作，也就是数学研究；另一方面，我还得在石油天然气学院完成一些“正式”的研究工作。

我在石油天然气学院的导师是应用数学系的雅科夫·霍尔金（Yakov Isaevich Khurgin）。雅科夫曾经是盖尔范德的学生，他非常有魅力，而且深受人们的尊敬。当时他已经快70岁了，不过我们都认为他是“最酷”的老师。他的课有极强的吸引力，他讲课时充满幽默感，学生出勤率最高。尽管我从大学三年级开始就逃掉了大多数的课，但是在雅科夫讲授概率论和统计学时，我总是尽量去上课。大学三年级时，雅科夫成为我的导师。

雅科夫对我非常热情友善。他总是为我着想，当我遇到困难时，他也总是及时帮助我。比如，有一次，我在住宿方面遇到问题，他动用自己的关系为我排忧解难。雅科夫非常聪明，善于“与体系打交

道”。尽管他是犹太人，但是他在石油天然气学院却享有崇高的地位，是一位正教授，还领导着一个实验室，其研究涉及石油开采和医药等多个领域。

同时，雅科夫积极从事数学知识普及工作，写过好几本适合非数学专业学生阅读的数学畅销书。其中有一本叫作“那又怎么样”（*So What?*），我特别喜欢这本书。书中，雅科夫介绍了他与科学家、工程师和医生合作的经历。通过与这些人的对话，他以轻松愉快的方式将很多有意思的数学概念（大多数涉及他的专业，即概率与统计学），以及这些概念的应用娓娓道来，悉心阐释。该书选择了这样一个书名，目的是表现数学家遇到现实问题时的好奇心。他写的这些书，还有他那积极向大众推广数学理念的热情，都深深地启发了我。

雅科夫有多年与医生（大多是泌尿科医生）合作的经历，他最初与医生合作是出于个人原因。“二战”时，他作为数理系的一名学生应征入伍，上了前线。由于战壕中的恶劣环境，他的肾脏出了问题。这对他来说是件幸事，他因此住院，并幸存下来，而与他一起入伍的同学，却大多在战斗中死于非命。不过，从那以后，他的肾脏就留下了病根儿。在苏联，医药是免费的，但是医疗服务的水平较低。要想得到较好的治疗，病人要么和医生有较好的私人关系，要么向医生行贿。不过，雅科夫有别人没有的优势：他拥有数学专业知识。凭借这个优势，他与莫斯科泌尿科的一些出色的医生交上了朋友。

这对于雅科夫来说非常重要。无论何时，只要他的肾脏不适，他就可以住进莫斯科最好的医院，接受优秀医生的优质服务。对于这些医生来说，同雅科夫处理好关系也同样重要，因为雅科夫可以帮助他们分析数据，为他们揭示出一些以前不为人所知的有趣现象。雅科夫经常说，医生们需要分析病人具体的情况，然后做出具有针对性的医疗诊断，这就是他们的思维习惯和特点。但是，也是因为这个特点，他们有时很难关注全局性问题，无法发现一般性规律和原则。而数学

家可以在这方面为他们提供帮助，因为数学家的思维方式与医生完全不同：“我们接受过相关训练，会寻找并分析一般性规律。”雅科夫的思维方式，得到了他的医生朋友们的赞赏与认可。

在雅科夫担任我的导师之后，他安排我参与他的医学研究项目。在雅科夫指导我学习的两年半时间里，我们一共完成了三个泌尿学课题，三位年轻的泌尿学专业研究生利用这些成果，完成了他们的博士论文。我因此成为医学杂志论文的合作作者，甚至还与他人合作申请了一项专利。

至今，我还清楚地记得第一个项目开始时的情景。我和雅科夫一起去见阿列克谢·韦利卡诺夫（Alexei Velikanov），后者是一位年轻的泌尿科医生。他的父亲是莫斯科的一位优秀的内科医生，与雅科夫有多年的交情（也为雅科夫治过病），因此，他请雅科夫照顾他的儿子。阿列克谢从100名做过前列腺肿瘤（一种良性肿瘤，常见于老年病患）切除手术的病人那里收集了各种数据，包括手术前后的血压等检测结果。他希望根据这些数据可以确定什么时候做这项手术的成功率更高，并应用于他的临床实践。

阿列克谢把这些数据整理到一张很大的纸上，让我们观察和分析。他把希望寄托在我们身上，请我们帮助他处理这些数据。后来我发现，这种情况经常发生。在医生、工程师等人的眼中，数学家手里仿佛有一根魔棒，随便挥一挥，就能从他们收集的那些杂乱无章的数据中得出某些结论。当然，这种想法根本不切实际。我们的确掌握了一些有效的统计分析方法，但是在大部分情况下，我们却无法采用这些方法，因为他们收集的数据并不精确，或者分属不同类型。有的数据比较客观，有的却比较主观（比如，病人“觉得”）；有的是定量数据，如血压和心率，有的则是定性数据，如对一些具体问题的肯定或否定回答。要把这些不同类型的数据输入统计公式，难度非常大（坦率地说，这是不可能的）。

如果医生提出的问题得当，他就会发现有些数据与问题的关系不大，有些甚至可以直接删掉。从我的经验来看，在医生们收集的这些数据中，只有10%至50%的信息，会在诊疗时用到。但是，如果你问医生，他们不会坦率地承认，而是坚称所有数据都非常有用，他们甚至会举出例子，以证明他们的确考虑了这些信息。其实在大多数类似的情况下，他们在做出决定时，只会依据为数不多的关键信息，而忽略掉大部分数据。但是，要让他们相信这个事实，还得费一番工夫。

当然，也有一些问题，只需将数据输入某个统计程序就能得出结论。不过，在研究这些项目的过程中，我逐渐意识到，医生们之所以需要数学专业人士的帮助，并不是因为我们会使用这些统计程序（毕竟，统计程序的用法并不难，人人都能学会），而是因为我们能设计出正确的问题，然后通过不带有任何偏见的冷静分析得出结论。对于没有接受过数学专业训练的人而言，真正有用的似乎是“数学思维习惯”。

在我参与的第一个课题中，我们用这种数学思维习惯，删掉了无关数据，并找到了剩余参数间的非凡联系，即相关性。这项工作并不轻松，我们花费了好几个月的时间才完工，但是结果令人满意。我们合写了一篇论文，介绍我们的成果，阿列克谢还把这些成果写到了他的博士论文中。我和雅科夫应邀参加了他的论文答辩，还有栗弗席兹。栗弗席兹是我的好朋友，也是石油天然气学院的一名学生，他与我们一起参与了这个项目。

我记得，一位医生在答辩会上问，得出这些结果的计算机程序叫什么名字。雅科夫回答说“爱德华与亚历山大”，他说的是实话。我们没有使用计算机，而是用一个简陋的计算器和手工操作，完成了所有的计算工作。计算（比较简单）不是关键，真正重要的是我们提出了恰当的问题。参加答辩会的一名杰出的外科医生说，这个项目证明数学在医学领域可以发挥重要作用，以后还可能会发挥更重大的作用。

这太令人意想不到了，我们的研究竟然受到了医学界的认可。对于这个结果，雅科夫感到非常高兴。

随后不久，雅科夫让我参与泌尿学研究的另一个项目。该项目与肾脏肿瘤有关，也是博士论文项目。同样，我幸不辱命，顺利地完成了这个项目。

我参与的第三个（也是最后一个）医学项目非常有意思。谢尔盖·阿鲁秋尼扬（Sergei Arutyunyan）这位年轻医生在撰写博士论文时，需要有人帮助他分析数据。我和他关系不错，便义不容辞地担起了这个任务。他研究的那些患者在接受肾脏移植手术时发生了排斥反应。在这种情况下，医生面临两种选择：采取措施保住新移植的肾脏，或者将之摘除。他必须迅速做出决断，从两种方案中选择一个，但是他的这个决定将会产生深远的影响：如果保住肾脏，病人可能会死亡；如果摘除肾脏，病人就需要再移植一个肾脏，但肾源十分稀缺。

谢尔盖希望可以根据超声波检查的定量结果，做出从统计学角度看最可行的选择。他在这个领域临床经验丰富，收集了大量数据。他希望我能帮他分析这些数据，制定一些有价值的客观标准，以帮助其他医生做出正确合理的判断。他说，还没有人在这方面取得成功；大多数医生都认为这是不可能的，他们宁愿相信自己的那一套“当机立断”的方法。

跟前面的那两个项目一样，这些数据也是从患者身上收集来的，涉及大约40种参数。在我们的例行碰头会上，我不断地提出一些具有针对性的问题，尽可能去确定这些数据间的相关性。不过，这并非易事。谢尔盖和其他医生一样，他的回答总是建立在具体病例的基础上，意义不大。

于是，我决定换一种方法。我想：“既然他每天都要做出这些决定，那么他肯定有自己的一套办法。如果我‘变成他’，进行换位思

考，结果会怎么样呢？虽然我没有多少医学知识，但我可以模仿他的决策过程，了解他使用的那些方法，然后以此为基础提出一些规则。”

因此，我提议我们俩一起玩一个游戏。谢尔盖收集了大约270名病人的数据，我从中随机选取了30人的数据，而把其他数据放到了一边。我拿着这些随机抽取的病人的病历，让谢尔盖坐在办公室的另外一角，向我询问病人的情况，我则对照病历回答。我这样做的目的是了解他提问的规律（虽然我不知道他提出这些问题的目的是什么）。比如，有时候他会提出不同的问题，或者提出的问题相同，但是提问的次序不同。这时，我就会打断他：“看上一个病人时，你没有问这个问题。但是这次，你却提出了这个问题，为什么？”

谢尔盖回答道：“上一个病人的肾脏体积是那样的，因此可以排除这种可能。但是这个病人的肾脏体积是这样的，因此很有可能有这个问题。”

我把所有这些对话都记录下来，并尽可能地内化这些信息。多少年过去了，我现在仍能清晰地回忆起当时的场景：谢尔盖坐在办公室角落的椅子上，一边大口大口地吸烟（他的烟瘾很大），一边沉思。我感觉自己正在对他的思维方式进行解构，这件事太有意思了，就好像把完整的拼图拆开，以确定哪些拼图碎片非常关键。

谢尔盖的回答为我提供了有价值的信息。他回答过我提出的三四个问题之后就可以得出诊断结果，我把他的诊断结果与他在患者病历上写下的诊断结果进行了对比，发现两者完全一致。

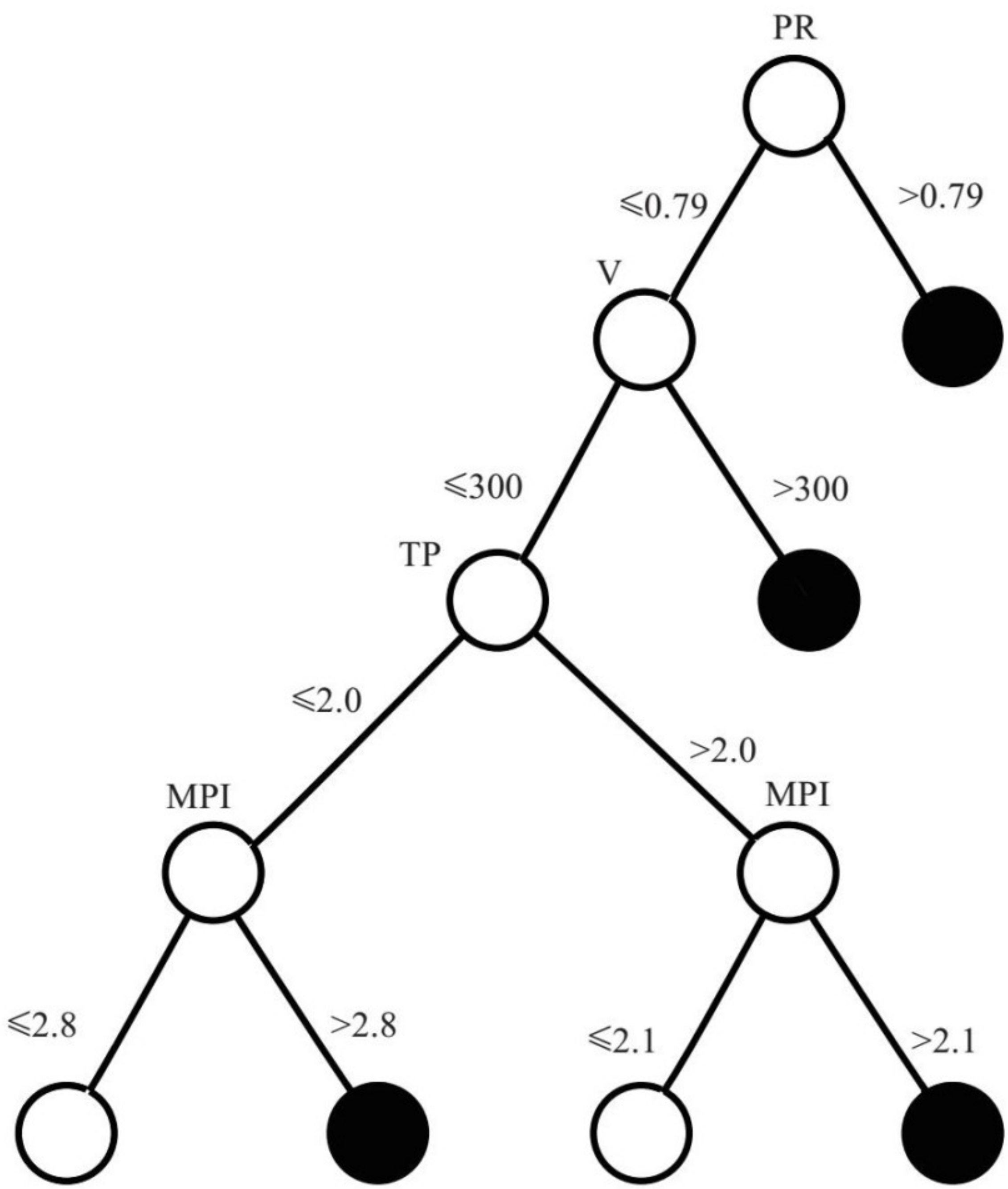
我们就这样测试了一个又一个病例。通过提问，我已经掌握了他的诊断规律，也能下诊断结论了。在连续测试了6个病例之后，我已经能预测到谢尔盖的结论了。事实上，谢尔盖在大多数诊断中都采取了一种比较简单的法则。

当然，也有一些病例不适用这种法则。不过，能迅速诊断90%至95%的病例，已经很了不起了。谢尔盖告诉我，在关于超声波诊断的已有文献中，还没有发现类似的诊断准确率。

“游戏”结束后，我得出了一个具体规则，并绘制出一幅决策树形图（见下页）。树形图的每个节点都有两条线通往其他节点；在第一个节点处，医生根据具体问题得到的回答，决定在下一级中的两个节点中如何做出选择。假设第一个问题询问的是移植肾脏外周血管阻力（PR）指数（谢尔盖在他的研究中提出的一个参数）。如果该指数大于0.79，就表示很有可能发生了排斥反应，病人需要立刻做手术。在这种情况下，我们移动到右侧的黑色节点处。如果该指数小于0.79，我们则去到左侧节点处，提出下一个问题：肾脏的体积（V）有多大？依此类推。针对病人的每项数据，我们在树形图上都形成了一条具体的路径。在经过至多4个步骤之后，树形图就会结束[目前，剩下的两个参数（即TP与MPI）有什么含义，对于我们来说并不重要]。如图所示，末端的节点表示最后的结论：黑色节点表示“需要做手术”，白色节点表示“无须做手术”。

我把前面放到一旁的约240个病例拿过来，用这个方法进行测试。结果表明，一致性程度很高，约有95%的病例都得到了准确的诊断结果。

这套算法用非常简单的语言，描述了医生在做诊断时考虑的一些要点，揭示出描述病人情况的哪些参数与诊断结果之间有最密切的关系。树形图把最初的约40个备选参数缩减到4个。例如，谢尔盖提出的外周血管阻力指数可以反映血液流过肾脏的情况，其重要性在这套算法中得到了充分的体现。该参数在医生做出决策的过程中能起到十分重要的作用，其本身就是一个重要发现，也是该领域需要进一步研究的一项重要内容。其他医生在诊断时也可以应用这套算法，他们还可以进行测试，甚至做出细微的调整，使整套算法发挥更大的效用。



我们写了一篇论文介绍这套算法，谢尔盖也以此为基础完成了他的博士论文。随后，我们申请了专利，一年之后，专利申请获得了批准。

在接受雅科夫指导的过程中，我们俩的关系十分融洽。不过，我在数学上的“其他”活动（与富克斯及费金的合作）从来没有告诉过其他人，就连对雅科夫我也一直守口如瓶。应用数学好像我的“合法妻子”，而理论数学则是我的“地下情人”。

就在我为找工作一事一筹莫展时，雅科夫告诉我，他在石油天然气学院领导的那个实验室愿意接收我担任助理研究员，而且一年后我就可以攻读博士学位。如果接受这份工作，在可以预见的将来，我的就业前景将会一片光明。他的这个建议似乎非常诱人，但我还是会遇到大量障碍。我的父亲在我申请报考石油天然气学院之前曾实地考察过，他当时就对这类阻碍有所察觉。

当然，雅科夫也清楚这个情况。他在石油天然气学院工作了几十年，对这里的一切都了如指掌。他自己能在这里就职，是因为维诺格拉多夫（Vinogradov）院长亲自出面邀请他，雅科夫对院长也十分尊重。

我的工作问题无须维诺格拉多夫院长亲自定夺，而是会交由学校的中层领导处理。只要申请人的姓氏中有犹太裔的痕迹，这帮家伙肯定不会给他任何机会。但是雅科夫熟悉这一套流程，知道该如何应对。我在石油天然气学院的最后一学期开始之后，留给我找工作的时间已经不多了。雅科夫打印了一份任命书，放到公文包里随身携带。只有有机会同维诺格拉多夫院长见面，雅科夫就会递交这份任命书给院长。

这样的机会很快就来了。有一天，当雅科夫走进学校大门时，正好碰到了维诺格拉多夫院长。维诺格拉多夫院长很高兴地跟他打招呼：“雅科夫，最近好吗？”

“非常糟糕。”雅科夫满面愁容地说（看来，他的表演天赋很不错）。

“怎么了？”

“我们的研究一直进行得很顺利，取得了一些成果。但是，现在却遇到了麻烦，缺少人手。我指导的一个学生相当优秀，今年就要毕业了，可我没有办法招收他。”

我觉得，维诺格拉多夫院长肯定是想在雅科夫面前展示自己的权威（这正中雅科夫的下怀），他对雅科夫说：“别着急，这件事我来处理。”

于是，雅科夫赶紧把任命书交给了他，维诺格拉多夫院长也接过去了。

通常，这样的任命书在到达维诺格拉多夫院长的办公桌之前，需要经由12个人签字，其中有些人肯定会万般阻挠，让它无疾而终。但是，现在维诺格拉多夫已经签过字了，他们还能怎么样呢？他是学校的最高领导，他们不可能违背他的意愿。他们虽然对这件事咬牙切齿，但最终也只能服从，乖乖地签字。我真的很想看看，当他们看到任命书上的维诺格拉多夫院长的签名时，其表情是什么样子的！雅科夫凭借他的聪明才智，成功地帮我找到了工作。

第 13 章
来自哈佛大学校长的邀请

1989年3月，就在我承受着巨大的就业压力，感到前途一片渺茫之时，我收到了一封来自美国的信，信封上印着“哈佛大学”几个字。

亲爱的弗伦克尔博士：

根据数学系的推荐，我诚挚地邀请你于1989年秋造访哈佛大学，领取哈佛大学为你提供的学业优良奖学金。

你的朋友，

哈佛大学校长

德里克·博克（Derek Bok）

我之前虽然听说过哈佛大学，但是当时我并不清楚哈佛大学在全球学术界的重要地位。收到去美国领取奖学金的邀请似乎是一个了不起的荣誉，更何况给我写邀请信的还是哈佛大学校长本人！尽管我还没有拿到本科学位（当时，我在石油天然气学院就读的最后一个学期还没有结束），但是他竟然称呼我为“博士”。

这是怎么一回事呢？原来，我与伯亚合作完成的研究成果在学术圈引起了反响。我们合写的第一篇小论文已经发表，并且即将完成另外三篇更长的论文（全部用英语写作）。从瑞典来到莫斯科访问的物理学家拉尔斯·布林克（Lars Brink）正在编著一部论文集，他希望收录这三篇论文中的一篇。我们向他提交了论文，并要求他再复印20份左右，分送给我们觉得有可能对此感兴趣的外国数学家和物理学家。我到莫斯科自然科学图书馆里查阅他们发表的论文，找到他们的联系地址，然后汇总成一个名单，交给了拉尔斯。拉尔斯非常热心，他知道我们自己完成这项工作的难度很大，便答应帮助我们把论文分送给这些数学家和物理学家。那篇论文后来有了很大的知名度，其中一个原因就在于它在量子物理方面的应用。

尽管互联网的流行是在那之后几年的事，但是当时科学文献的传播系统已经很高效了：论文作者在正式发表论文之前，会把论文打印出来（即所谓的“预印本”），然后四处散发。人们在收到论文后，又会复印论文，进一步散发至他们的同事那里，同时也会送到大学的图书馆。收到我们这篇论文的那20个人中，肯定也有人这样做了。

与此同时，苏联正在发生一些改变，政府对人们出国的限制放宽了。

有好几个人获准出国，其中包括盖尔范德。还有一位才华横溢的年轻数学家也去了美国，他叫萨沙·贝林森（Sasha Beilinson），是伯亚的一个朋友。他去美国是为了见他以前的合作伙伴约瑟夫·伯恩斯坦（Joseph Bernstein），伯恩斯坦于几年前移民美国，在哈佛大学任教。

西方国家的一些科学家也发现了这一变化，他们借此机会向苏联的学者们发出了邀请，阿瑟·杰斐（Arthur Jaffe）就是其中一位。杰斐是一位著名的数学物理学家，时任哈佛大学数学系系主任。他决定创设一个访问学者的职位，以便从苏联数学界招揽一些有才华的年轻人。1988年秋季，盖尔范德到哈佛大学访问。他获得过哈佛的荣誉学位，与哈佛大学校长德里克·博克有私交，因此杰斐请他帮忙说服校长，为这个项目提供资金支持[兰顿·克雷（Landon Clay）也提供了部分资金，后来还创建了克雷数学研究所]。

杰斐把这个项目称作“哈佛大学学业优良奖学金”。在项目启动之后，杰斐面临如何甄选学者的问题，为此他征求了多位数学家的意见。其中肯定有好几位数学家（包括贝林森）提到了我，于是在第一批的4个获奖人选中，我占有一席。

在博克校长给我发出邀请信后不久，杰斐本人又给我写了一封长信，向我详细地介绍哈佛大学关于访问学者的相关规定。我需要在哈

佛待上三到五个月的时间，身份是客座教授，除了偶尔上几次课介绍我的研究之外，不需要完成其他正式工作。哈佛大学负担我的差旅费、住宿费与生活开支，事实上，只差苏联离境签证没有替我办理。幸运的是，我的签证不到一个月就办下来了，这让我大吃一惊。

在信中，阿瑟·杰斐告诉我，我最早可以在8月底去，一直待到次年1月底。但是，我决定在那里只待三个月，这是规定要求的最短时间。为什么？这是因为我并不打算移民美国，而是准备回国。雅科夫费尽了心思，才为我在石油天然气学院争取到这份工作，我却要请假出国，对此我不免感到愧疚。

在我拿到离境签证之后，哈佛之旅眼看就要成行。此时，我必须向雅科夫坦白我的“课外活动”，包括私下里与费金合作进行的数学研究，以及哈佛的邀请。不出我的预料，他果然非常吃惊。他一直以为我在全心全意地和他合作，并把我的所有精力都投入到那些医学项目上了。因此，他对我要去美国的第一反应并不是很积极。

“你去了哈佛大学，那实验室的活儿谁干啊？”他问。

他的妻子塔马蕾对我非常好，每次去他们家，她都对我非常热情。这时候，她站出来为我解围：“雅夏，你的话很没有道理。这个孩子受到哈佛大学的邀请，这是多大的荣誉啊！他应该去，等他回来，他肯定会继续帮你干活。”

于是，雅科夫很不情愿地答应了。

夏天很快就过去了。1989年9月15日，我该离开苏联前往哈佛大学了。我从莫斯科飞到纽约的约翰·肯尼迪国际机场，然后转机前往波士顿。杰斐自己有事走不开，但是他安排了一名研究生前来接机。他带着我来到数学系为我租好的公寓，这是一套两居室的房子。与我合住的尼古拉·莱希廷辛（Nicolai Reshetikhin）也是一个奖学金获得者，他

比我晚到了几天。公寓所在的“植物园”公寓小区是哈佛大学的产业，步行到哈佛园（Harvard Yard）用不了10分钟时间。一切看上去都是那么新奇，这让我无比兴奋。

我到达公寓时已经是深夜了。因为时差问题，我筋疲力尽，倒头就睡。第二天，我去附近的农贸市场买了点儿菜。等回到公寓做色拉时，我发现自己忘了买盐。公寓里一点儿盐都没有，我只好吃没放盐的色拉。

刚吃完，门铃响了。站在门外的是阿瑟·杰斐，他准备开车带我到处转转。哈佛大学数学系的主任亲自开车，载着一个21岁的大男孩在城里兜风，这样的事想想都觉得不可思议！坐在车上，我沿途看到了哈佛园、查尔斯河、美丽的教堂以及波士顿市区的摩天大厦。天气非常不错，这个城市给我留下了非常深刻的印象。

我们驱车逛了两个半小时。在回来的路上，我告诉阿瑟我得去买盐。他说：“好的，我带你去附近的超市。”

他把我带到波特购物广场上的明星超市，并且待在车里等我。

那是我第一次去超市，超市里琳琅满目的商品让我眼花缭乱。当时，苏联食品匮乏。在我的家乡科勒姆纳市，我们只能买到面包、牛奶和土豆等常见食品。要买其他食品，就得去莫斯科。即使在莫斯科，人们也只能买到一些品质不高的摩泰台拉香肚和奶酪。我每个周末从莫斯科回家时，都会给父母带一些食品。当看到一排排货架上花样繁多的食品时，我简直不敢相信自己的眼睛。

“商品这么多，我该怎么找啊？”我有点儿摸不着头绪。我沿着货架，一排排往下找，可就是找不到盐。现在想想，肯定是因为超市的商品太丰富，以至于我眼花缭乱，否则我怎么可能看不到货架上方的标识呢？我问超市的工作人员：“食盐在哪里？”可是他的回答我根本

听不懂。我的英语水平足以上好数学课，但我缺乏日常交流的经验。那位工作人员的话又带有浓浓的波士顿口音，比较难懂。

明星超市就像一个大迷宫，我完全搞不清方向。半个小时过去了，我都快疯了。终于，我找到一包加蒜的食盐。“太好了，”我想，“我得赶紧出去。”我付完款，走出了超市。阿瑟一直在等我，他肯定很奇怪：已经过去40分钟了，这个孩子到底在超市里干什么啊？

“美国的商品实在太丰富，让我晕头转向。”我想。

就这样，我慢慢地开始适应美国的生活。

＊＊＊

奖学金的其余两位得主是在那年秋天到达哈佛大学的。一个是与我住一套公寓的尼古拉·莱希廷辛（他比我晚到一周），另一个是鲍里斯·齐冈（Boris Tsygan）[注]。他们俩都比我大10岁，都主持过数学专题讨论会。我知道他们的研究领域，但是没和他们见过面。第一个学期，我们就建立了友谊，成为彼此生活中的朋友。

很多人都把尼古拉叫作柯里亚，他来自圣彼得堡，与他人合作提出了量子群理论，因此颇具名气。量子群是普通群的推广，更准确地说，是李群的某种变形——量子群是李群在多个数学及物理领域中普遍存在的一种形式。例如，柯里亚和另一位数学家弗拉基米尔·图拉耶夫（Vladimir Turaev）合作，利用量子群建立了“纽结不变量”（invariant of knots）和三维流形。

伯亚·齐冈（即鲍里斯·齐冈）来自乌克兰的基辅市，与我的老师鲍里斯·费金有过多年的合作。他在大学刚毕业时就有了一个重要发现，在“非交换几何”（non-communicative geometry）领域取得了重大突破。跟其他犹太裔数学专业毕业生一样，他也被剥夺了就读研究生院

的权利。大学毕业后，他进入了基辅的一家重型机械厂，整天与喧闹的机械打交道。就是在这样一个远非理想的环境中，他做出了那个重要发现。

人们往往以为，我们在研究数学问题时，都身处索然无味的环境中。大家在一间简陋的办公室里围坐在一起，要么盯着电脑显示屏，要么双眼无神地望着天花板。其实，有些非常重要的想法常会突然闯进我们的大脑，有时候甚至是在工厂的喧嚣声中。

* * *

漫步在哈佛园的草地上，那些老式建筑风格的砖瓦房屋映入我的眼帘，还有雕像以及古老教堂的尖顶。我眼前的这一切无不彰显着哈佛园遗世独立的气质，那种对知识的渴求与永不停息的探索精神，成就了哈佛大学长久以来的优良传统。

哈佛大学数学系所在的“科学中心”是一幢具有现代风格的建筑，它就坐落在哈佛园外面。从外观来看，它仿佛是一艘外星人的太空飞船，在降落到马萨诸塞州的剑桥市之后，发现这个地方是如此美丽，便再也不愿意离开了。数学系位于这栋建筑的三层，办公室公共区域的设备齐全，有咖啡机、舒适的沙发，有精心设计的数学图书馆，甚至还摆放了一张乒乓球桌。办公氛围十分温馨，给人一种家的感觉，即使到了半夜，这里也人头攒动。有的人在刻苦钻研，有的人在认真阅读，有的人在走廊里焦躁不安地走来走去，有的人在热火朝天地交谈，还有的人倒在沙发上小憩。在这样的环境下，人们似乎可以一直待下去（有的人似乎从未离开过）。

与其他学院相比，数学系人数不多，只有不超过15名全职老师，还有10名左右的博士后承担本科三个年级的教学任务。我到数学系的时候，一些当时最知名的数学家正在该系任教，包括约瑟夫·伯恩斯坦、拉乌尔·博特（Raoul Bott）、迪克·格鲁斯（Dick Gross）、广中平

佑（Heisuke Hironaka）、戴维·卡自丹（David Kazhdan）、巴里·马左尔（Barry Mazur）、约翰·泰特（John Tate）和丘成桐。能结识这些数学家并向他们讨教，的确是我一生中难得的机遇。至今我还常常回味拉乌尔·博特留给我的美好回忆。拉乌尔·博特是一个极具魅力的大个子数学家，当时已经快70岁了。他头发花白，对人非常友善。有一次，他在走廊上把我拉到一旁，瓮声瓮气地问我："小伙子，最近怎么样啊？"

在楼层中段有一些小房间，大约30名研究生就在这些小房间里学习。

人们对待我们三个俄罗斯人——我、柯里亚和伯亚——都比较热情。尽管在随后几年里，俄罗斯的科研人员蜂拥而至，进入美国的各所大学，但是在当时，苏联访美的学者还是十分稀少的。在剑桥市生活了一周左右的时间后，我觉得自己已融入了当地的生活。在我眼里，一切都很自然，充满吸引力。我买了最具嬉皮士风格的牛仔裤，还有索尼随身听（别忘了，这可是1989年）。我经常戴着耳机，一边在城里散步，一边听着优美的音乐。在陌生人眼中，我就是一名普普通通的21岁学生。我的英语口语还有待提高，我每天都会买一份《纽约时报》，借助字典，至少阅读一个小时（后来我才发现，当时辛辛苦苦弄明白的英语单词，原来有很多都是生僻词）。我还经常在深夜收看电视节目。

我最爱看的是戴维·莱特曼（David Letterman）的脱口秀节目（当时在美国全国广播公司电视台播映，半夜12点35分开始）。当我第一次收看时，我一句话也听不懂。但我却觉得这个节目适合我，如果我能听懂主持人讲的话，我一定会喜欢上这个节目。因此，我的劲头更足了。我坚持每晚收看这个节目，几乎达到偏执的地步。慢慢地，我就能听懂节目中的笑话、情境和涉及的背景知识了。我把握住点点滴滴的学习机会，如饥似渴地了解美国流行文化。有时我不得不早睡，

我就会把这个节目录制下来，等第二天起床后边吃早饭边看。对于我来说，莱特曼的节目已经像宗教仪式一样不可或缺了。

* * *

尽管不需要完成任何正式工作，我们4个获得奖学金的人还是每天都会来到数学系，研究自己的课题，与其他人交流，参加名目繁多的专题研讨活动。与我交谈最多的是约瑟夫·伯恩斯坦和戴维·卡自丹两位教授，他们都是俄罗斯裔。这两位了不起的数学家都曾师从盖尔范德，彼此关系融洽，但是脾性却大相径庭。

约瑟夫沉默寡言，十分谦逊。当你向他提问时，他总是静静地倾听，然后不慌不忙地思考一番。他经常会说他也不太清楚该如何解答，但还是会告诉你他的想法。他的解答思路清晰，直指核心。尽管他很谦虚，但是经过他的解答，答案常常呼之欲出。通过与他交流你会发现，你不一定非得是个天才才能做到融会贯通。对于在数学领域有远大抱负的年轻人来说，这种感觉太棒了！

戴维则跟约瑟夫完全不同。他充满活力，才思敏捷，头脑睿智。他毫不掩饰自己那渊博的知识素养，总是锋芒毕露，有时还会表现出不耐烦。他的这些特点跟他的老师盖尔范德如出一辙。在主持专题研讨会时，如果他认为发言人解释得不够透彻，他就会径直走到黑板前，夺过发言人手中的粉笔，越俎代庖进行讲解。当然，这是他对发言人所讲内容感兴趣时的反应。如果他并不感兴趣，他就会坐在那儿打盹儿。他的确非常博学，当有人问他问题时，他几乎不会说“我不知道”。多年来，我与他进行了多次交流，也从他身上学到了很多知识。后来，我与他合作完成了一个项目，并取得了令人满意的成绩。

我来到哈佛大学后第二周的一次邂逅也对我产生了深远的影响。在剑桥市哈佛大学附近还有另外一所学校，它的名望不及哈佛大学，人们通常把该校的校名缩写成MIT。（当然，我是在开玩笑！）哈佛

大学与麻省理工学院之间在某些方面存在竞争，但是两校数学系的人却交从甚密。老师们经常在对方学校担任学生的导师，两校的学生也经常跑到对方学校听课。

伯亚·费金的朋友和合作伙伴萨沙·贝林森，被麻省理工学院聘为教授，我当时在那里听他的课。第一次上课时，一位40多岁的英俊的中年人坐在与我隔着几排的座位上。有人指着他说："那是维克多·卡茨。"哇！这就是提出卡茨–穆迪代数等好几种理论的那个人吗？他的研究成果，我已经学习了好几年的时间了！

下课后，有人介绍我们认识。维克多热情地和我打招呼，还说他很想进一步了解我的研究成果。他甚至邀请我到他主持的每周一次的专题研讨会上发言，当时我激动得不能自已。之后，连续三个周五，我在他的专题研讨会上做了三次报告。那是我第一次用英语在专题研讨会上发言，我觉得效果相当好：出席的人很多，大家都很感兴趣，提问环节也很热烈。

维克多对我颇为照顾。我经常跑到麻省理工学院，在他的那间宽敞的办公室里与他一起讨论数学问题。他经常邀请我去他家吃晚饭，我们还合作完成了好几个课题。

* * *

在我来到哈佛大学大约一个月之后，伯亚·费金也到了剑桥市。萨沙·贝林森给他发了邀请信，邀请他来麻省理工学院访学两个月。伯亚是我的良师益友，他能来剑桥市，我非常高兴。而且，我们还有几个数学合作项目没有完成，正好可以利用这个机会向前推进。但我当时并不知道，他的到访导致我的生活陷入一片混乱。

通往西方国家的大门打开了，从事数学研究的人可以自由地去美国等国家的大学访学了。这个消息在莫斯科的数学界迅速传开，很多

人决定抓住这个机会，移民并定居美国。他们开始向美国各所大学提交申请信，给已经去了美国的同事打电话，请他们帮忙找工作。由于大家都不清楚这种“开放”政策会持续多久（大多数人预计，几个月之后边境将会再次关闭），因此整个莫斯科都非常浮躁，人们在聊天时常会讨论同一个问题：“有什么好办法可以出国吗？”

出现这样的情况是必然的。在苏联，许多学者都要面对反犹太主义的干扰和阻挠。学术界没有他们的立足之地，他们只能在私下里从事数学研究。而且，尽管苏联数学界有很强的实力，但是，他们缺乏对外交流的机会。西方国家却可以为他们提供职业发展良机。

伯亚·费金一到美国，就察觉到“苏联人才流失”的浪潮正汹涌而来，势不可当。苏联的经济已经开始崩溃，全国各地食品匮乏，政治形势也越来越不稳定。而在美国，人们的生活水平远远高于苏联，各种商品都很充足，学术界也是一派和谐融洽的氛围。两国之间的反差十分明显，在亲身体验了美国的舒适生活之后，又有什么理由说服他们再回到苏联呢？顶尖数学家（实际上，是有能力找到工作的所有人）大量外流的势头似乎已经无法遏制，而且一触即发。

不过，尽管伯亚终其一生都在与反犹太主义不屈不挠地做斗争，但他仍然一心想要回到莫斯科。1969年，他被录取成为莫斯科大学的本科生（在他报考的那一年，莫斯科大学还是招收了一些犹太学生的），但是他被剥夺了攻读博士学位的权利。因此，他只能黯然离开，前往雅罗斯拉夫尔市的一所大学攻读博士学位。毕业后，他四处奔走找工作，最后在固态物理研究所就职。尽管如此，伯亚仍然因为这股出国潮而深感不安。

一想到莫斯科数学界这样一个大型学术圈很快就会分崩离析，伯亚便感到伤心欲绝。多年来，他一直生活在这个紧密团结的集体中，现在却要眼睁睁地看着它土崩瓦解。很快，莫斯科将只剩下他孤零零的一个人，他再也无法享受到与朋友、同事一起钻研数学的乐趣了。

在我们交谈时，很自然地就聊到了这个话题。伯亚一再劝说我回国，而不应该随波逐流，留在西方国家。他同时还担心，在美国我可能无法成为一名优秀的数学家。他认为美国的“消费社会”会削弱人们的动力，扼杀学术道德。

“瞧，你有天赋，”伯亚说，“但还需要继续培养。你必须刻苦钻研，就像你在莫斯科时那样，这样才能激发你的潜力。但是，在美国，这是不可能的。那里诱惑太多，让人分心。那里的人追求的是放纵享受、及时行乐，在这样的环境里你怎么可能专心致志地做研究呢？”

他的话我没有听，至少没有全听。虽然我知道我研究数学的动机非常纯粹，但是我才21岁，而伯亚比我大15岁，还是我的导师，我在数学上取得的所有成绩也都应归功于他。因此，他的这番话让我不由地踌躇起来，万一他的观点是对的呢?

哈佛大学的邀请是我人生的转折点。5年前，我在莫斯科大学的招生考试中遭遇滑铁卢，这似乎预示着我成为数学家的梦想将无可挽回地化为泡影。在这种情况下，哈佛大学的邀请证明我5年来的勤奋没有白费。我希望能再接再厉，不断有新的发现，成长为一名最优秀的数学家。在我看来，哈佛大学的邀请只是这个征程中的一环，也是我取得的一次胜利，但是前方的路还很漫长。

阿瑟·杰斐等人信任我，给了我这个机会，我不能让他们失望。

在剑桥市，我幸运地得到了维克多·卡茨等杰出数学家的鼎力相助，但是我也能感觉到一些同事的嫉妒情绪：为什么这个家伙好运不断？他取得的成绩真的有那么了不起吗？因此，我不能辜负人们对我的期望，我要向大家证明，我的研究成果绝非偶然和运气，我还可以在数学研究上取得更杰出、更重要的成就。

从事数学研究的人经常会结成小圈子，就像普通人一样，他们也喜欢谈论其他人取得的成绩。尽管来哈佛大学的时间还不长，但我已经听说了无数天才陨落的故事。经常有人说：“你还记得某人吧？他最初的研究成果多了不起啊，不过，最近三年他却碌碌无为。真是太可惜了！”

我十分担心三年后我也会变成庸庸碌碌的人，因此一刻也不敢放松，不停地钻研，内心充满了对成功的渴望。

与此同时，苏联的经济形势正在迅速恶化，国家前景不容乐观。我的父母在目睹了这一切之后，更加确信我在苏联不会有很好的发展前途。他们定期给我打电话，劝说我不要回去。当时，从苏联打电话到美国十分不便（费用也不便宜）。父母亲还担心我们家的电话被人窃听，为此他们宁愿花上差不多一整天的时间，去往莫斯科中央邮局给我打电话。尽管很想念我，但他们还是拼命地劝说我，让我留在美国。他们坚信，这个选择对我而言是最好的。

伯亚也考虑过我的利益，但他还要兼顾道德立场，即便做出的选择有违本意，他也会坚持如此。在这方面，我非常佩服他。当然，我也得承认，他在莫斯科生活得比较舒适（不过，他的生活很快就会发生变化。后来，他每年都要到国外工作几个月，主要是日本，为了养家糊口），因此他才能做出回国的决定。而我的情况则迥然不同，我在莫斯科没有家，我的临时国内签证只能保证居住权。尽管雅科夫为我在石油天然气学院找了一份研究助理的临时工作，但是薪水十分微薄，仅够支付我在莫斯科的房租。由于反犹太主义作祟，报考研究生将是一场艰苦的战斗，就业前景则更加惨淡。

11月底，阿瑟·杰斐把我叫到他的办公室，告诉我，他们可以把我在哈佛大学担任客座教授的时间延长至5月底。我必须尽快做出决定，但我实在是左右为难。我喜欢波士顿的生活方式，觉得这里非常适合我。剑桥市有哈佛大学和麻省理工学院，是非常重要的数学研究中

心。这里也有许多世界上最杰出的数学家，我可以很方便地登门求教。这里还有数量众多的专题研讨会，人们在做出激动人心的发现之后就会立刻在会上公布。我身边的人一个个才华出众。这样一个催人向上的环境，是数学界有抱负的年轻学子梦寐以求的神圣殿堂。莫斯科曾经也有这样的氛围，但是现在已经不复存在了。

不过，这是我第一次长时间远离家乡，我非常想念我的那些亲朋好友。我在剑桥市交往最密切的人是我的老师伯亚，他态度坚定地认为，我应该按照原计划在12月回国。

每天早晨我都会突然惊醒，我反复地问自己："我该怎么办？"现在回头看，这实在不应该是一个难题。但在当时，千头万绪缠绕在一起，真的让我难以抉择。在经过一番痛苦的思考和反复权衡之后，我决定采纳父母的建议，不回国了，并且把这个决定告诉了杰斐。我的朋友莱希廷辛与齐冈也做出了相同的选择。

伯亚有点儿不满，我知道，我让他失望了。12月中旬，我到洛根机场送他回莫斯科。在飞机起飞的那一刻，我的内心充满了悲伤和迷惘，不知道自己将面临什么样的命运，也不知道我们什么时候才能再见面。我没有接受伯亚的建议，选择留在美国，但是我知道，他所担心的事有可能真的会发生在我身上。

---

1. 第四位奖学金得主是薇拉·瑟甘诺娃（Vera Serganova），她在次年春天才来到哈佛大学。

第 14 章

层 – 函数字典

第二年春天，哈佛迎来了更多的访问学者，弗拉基米尔·德林费尔德就是其中一位。他的到来改变了我的研究方向，并且在很多方面都对我的数学研究生涯产生了深远的影响。这些变化的原因都与朗兰兹纲领有关。

此前，我听说过德林费尔德。尽管他当时才36岁，但已经是数学界的一个传奇人物。在我们结识6个月之后，他获得了菲尔兹奖。这是数学界最崇高的荣誉之一，有很多人认为，菲尔兹奖的分量并不亚于诺贝尔奖。

德林费尔德17岁时就发表了他的第一篇数学论文，20岁时已经开辟出关于朗兰兹纲领的新的研究领域。他来自乌克兰的卡尔可夫，父亲是一位著名的数学教授。20世纪70年代初，德林费尔德就读于莫斯科大学。（当时，莫斯科大学招生时虽然也会排挤犹太人，但仍会招收一定比例的犹太裔学生。）大学还没毕业，他就因为在研究中取得的成绩而闻名世界，并被研究生院录取。这对一名犹太裔学生而言的确非同凡响，他的导师尤里·曼宁（Yuri Ivanovich Manin）也是全世界最有独创性和影响力的数学家之一。

不过，即便是德林费尔德，也没能完全摆脱反犹太主义的侵扰。在获得博士学位之后，他不能在莫斯科就业，而只能到乌法市的一所地方性大学任教三年。乌法是位于乌拉尔山脉中的一座工业城市，德林费尔德并不愿意去那里，主要原因是那里没有人在德林费尔德关心的数学领域从事研究工作。不过，他在乌法待了三年之后，却完成了一篇重要的论文，介绍了可积分系统的理论。可积分系统现在被称作德林费尔德–索科洛夫系统，是德林费尔德与乌法当地的弗拉基米尔·索科洛夫（Vladimir Sokolov）合作完成的研究成果，然而这与他本人感兴趣的领域相去甚远。三年之后，德林费尔德终于在他的家乡谋得了一份工作，去卡尔可夫低温物理研究所就职。这份工作比较清闲，而且他得以与家人团圆。不过，在卡尔可夫上班，却无法与苏联数学

界保持密切联系。苏联数学家的第一聚居地是莫斯科，其次是圣彼得堡。

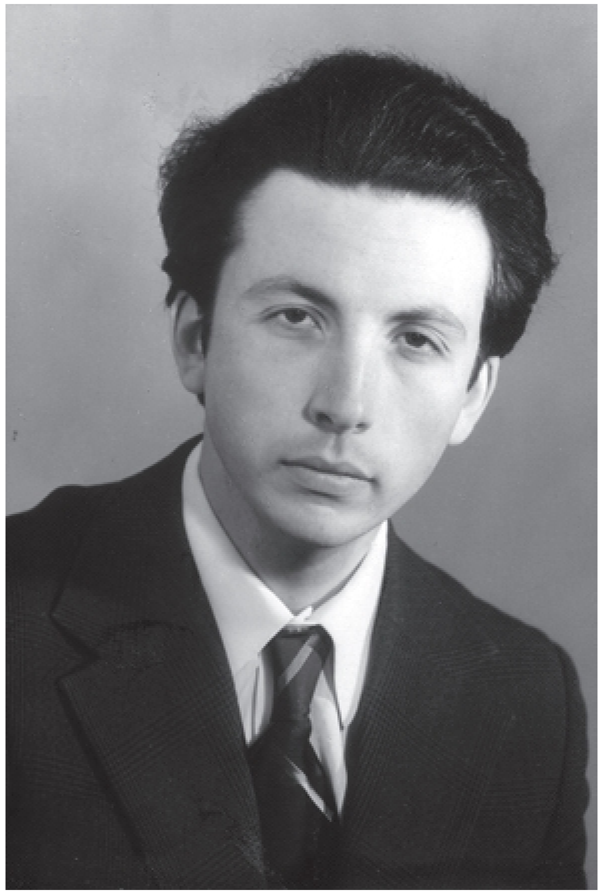
尽管德林费尔德孤军奋战，却在数学和物理等多个领域不断取得优异的成绩。他所做的贡献涉及范围之广令人咋舌。他不仅证明了朗兰兹纲领中的某些重要猜想，与索科洛夫合作掀开了可积分系统理论的新篇章，提出了量子群的一般理论（量子群最初是柯里亚·莱希廷辛与他人合作提出的一个概念），还有其他众多成果。

后来，有人尝试聘请德林费尔德到莫斯科工作。据我所知，物理学家亚历山大·贝拉温（Alexander Belavin）希望邀请德林费尔德到位于莫斯科附近的朗道理论物理研究所工作。为了增加成功的砝码，贝拉温决定和德林费尔德一起合作，最终完成了对"杨–巴克斯特经典方程"解的分类这个重要问题的研究。这个问题是当时物理学界的一个热点问题。他们的论文发表在盖尔范德主办的《泛函分析及应用》杂志上（据我所知，这是这份杂志刊登的最长的一篇论文，其重要性可见一斑），并且赢得了诸多赞赏。正是因为完成了这项研究，德林费尔德从此开始涉足推动众多数学分支发生重大变革的量子群理论的研究领域。不过，所有人的努力都无济于事。面对反犹太主义的阻挠，再加上德林费尔德没有居留莫斯科的国内签证，事情不可能出现任何转机。德林费尔德只能继续待在卡尔可夫，偶尔才有机会去莫斯科。

* * *

1990年春，德林费尔德应邀访问哈佛大学，他在那年的1月底抵达美国。这对于我而言是一个意外的惊喜。我听说过他的传奇故事，因此一开始见到他时显得有些拘谨，但是经过一番交流之后，我发现他十分友善大方。德林费尔德说话时语气温和，言辞谨慎，在谈到数学问题时，他乐于分享自己的观点。他在解释一个问题时，从来不会故作神秘，让人以为这个问题无比深奥，似乎没有他的帮助就无法解决（我的有些同事的确是这样，这里就不提他们的名字了）。恰恰相

反，他总是用平实的语言深入浅出地讲解问题，使人不知不觉就明白了其中的道理。



交谈了一会儿之后，德林费尔德告诉我，他对我和费金合作完成的那项研究很感兴趣，并且希望把我们的研究成果应用到他正在研究的一个与朗兰兹纲领有关的项目中。听到这番话，我更加放松了。

在第9章，我们谈到了安德烈·韦伊“罗塞塔石碑”的三个轨道：

数论 有限域平面上的曲线 黎曼曲面

最初，朗兰兹纲领的研究内容只涉及“罗塞塔石碑”左侧和中间这两个轨道，即数论与有限域平面上的曲线。朗兰兹纲领的理念是在伽罗瓦群与自守函数的表示之间建立联系。在“罗塞塔石碑”的左侧与中

间两个轨道上，伽罗瓦群的概念是完全成立的，在数学的另一个领域，即调和分析中，我们也可以找到与之相匹配的自守函数。

在德林费尔德的研究之前，对于右侧轨道，即黎曼曲面理论，人们并不清楚朗兰兹纲领的类比对象在其中是否存在。20世纪80年代初，德林费尔德在研究中首先提出了把黎曼曲面纳入朗兰兹纲领的观点，法国数学界的热拉尔·洛蒙（Gérard Laumon）也紧随其后。他们认识到，有可能以几何的方式重新建构朗兰兹纲领，使其对安德烈·韦伊的“罗塞塔石碑”的中间和右侧两个轨道也有意义。

在“罗塞塔石碑”左侧和中间的两个轨道上，朗兰兹纲领使伽罗瓦群与自守函数发生了联系。现在的问题是，如何在黎曼曲面理论中找到合适的类比对象。我们在第9章曾讨论过，伽罗瓦群是以黎曼曲面的基本群表示的，但对自守函数的几何类比却并未加以研究。

研究发现，合适的几何类比对象不是函数，而是被数学界称作“层”（sheaf）的概念。

为了理解这个概念，我们先从数字开始讨论。我们有自然数1，2，3，…，而且我们知道，自然数有很多应用，其中的一个应用就是表示维数。我们在第10章讨论过，直线是一维的，平面是二维的，对于任意自然数n，我们有n维平坦空间，亦称向量空间。我们现在设想，在某个世界中，自然数被向量空间所替代，也就是说，我们没有数字1，而是有一条直线，没有数字2，而是有一个平面，依此类推。

在这个新世界中，数字的加法被数学家称为“向量直和”（direct sum of vector spaces）的概念所取代。根据两个已知的分别带有自己的坐标数字的向量空间，我们可以创建一个新的向量空间。新的向量空间结合了原有的两个向量空间的坐标数字，因此其维数是原来的两个向量空间的维数之和。例如，直线有一个坐标数字，平面有两个坐标

数字。两者结合，我们便得到一个有三个坐标数字的向量空间，因此，该向量空间是一个三维空间。

自然数的乘法被向量空间的另一种运算所取代。已知两个向量空间，我们就可以得出第三个向量空间，即两个已知向量空间的“张量积”（tensor product）。在此，我不详细介绍张量积的具体定义，我们需要了解的很重要的一点是：如果两个已知向量空间的维数分别为m和n，它们的张量积的维数就是m×n。

可以说，向量空间的各种运算与自然数的各种运算相类似。但是，向量空间的世界远比自然数的世界复杂。任意已知数不存在内部结构，例如，数字3本身没有对称操作。但是，三维空间本身却存在对称操作。事实上，我们已经知道，李群SO(3)中的任意元素都会产生该三维空间的一个旋转操作。数字3只不过是该三维空间留下的一个残影，仅反映该三维空间的一个属性，即维数。对于该向量空间的其他属性，例如对称操作，数字3就无能为力了。

在现代数学中，我们建立了一个新世界，用向量空间来取代数字，从而使这些数字充满了活力。它们有丰富的内涵，彼此之间的关系也得到了极大的增强，远非加法和乘法运算那么简单。数字2减去数字1，我们只能得到一个答案，但是当把一条直线放入一个平面时，我们却能得到很多种不同的答案。

自然数可以形成一个集合，而向量空间则可以形成一个更复杂的结构，数学家称之为“范畴”（category）。一个已知的范畴中包含“对象”，如向量空间，还有一个对象向其他对象的“态射”（morphism）。例如，在已知范畴中，某个对象向其他对象的态射，从本质上看，是该对象在该范畴内的对称操作。因此，借助范畴的概念，我们无须关注对象的内部构成，而把注意力集中到对象之间的相互作用上。因此，数学领域的范畴理论特别适用于计算机科学。哈斯凯尔（Haskell Curry）等函数式计算机编程语言，仅仅是该理论在近期大量应用的一

个范例。现在看来，以后的计算机可能会更依赖于范畴理论，而不是集合理论。而且，无论我们是否意识到，范畴概念都将进入我们的日常生活。

从集合概念向范畴概念的转移，也是现代数学发展的驱动力之一，人们将这一变化称作“范畴化”（categorification）。范畴化实际上建立了一个新世界，把我们习以为常的概念提升到新的高度。例如，数字被向量空间所取代。接下来我们需要考虑的问题是：在这个新世界中，函数会发生什么变化?

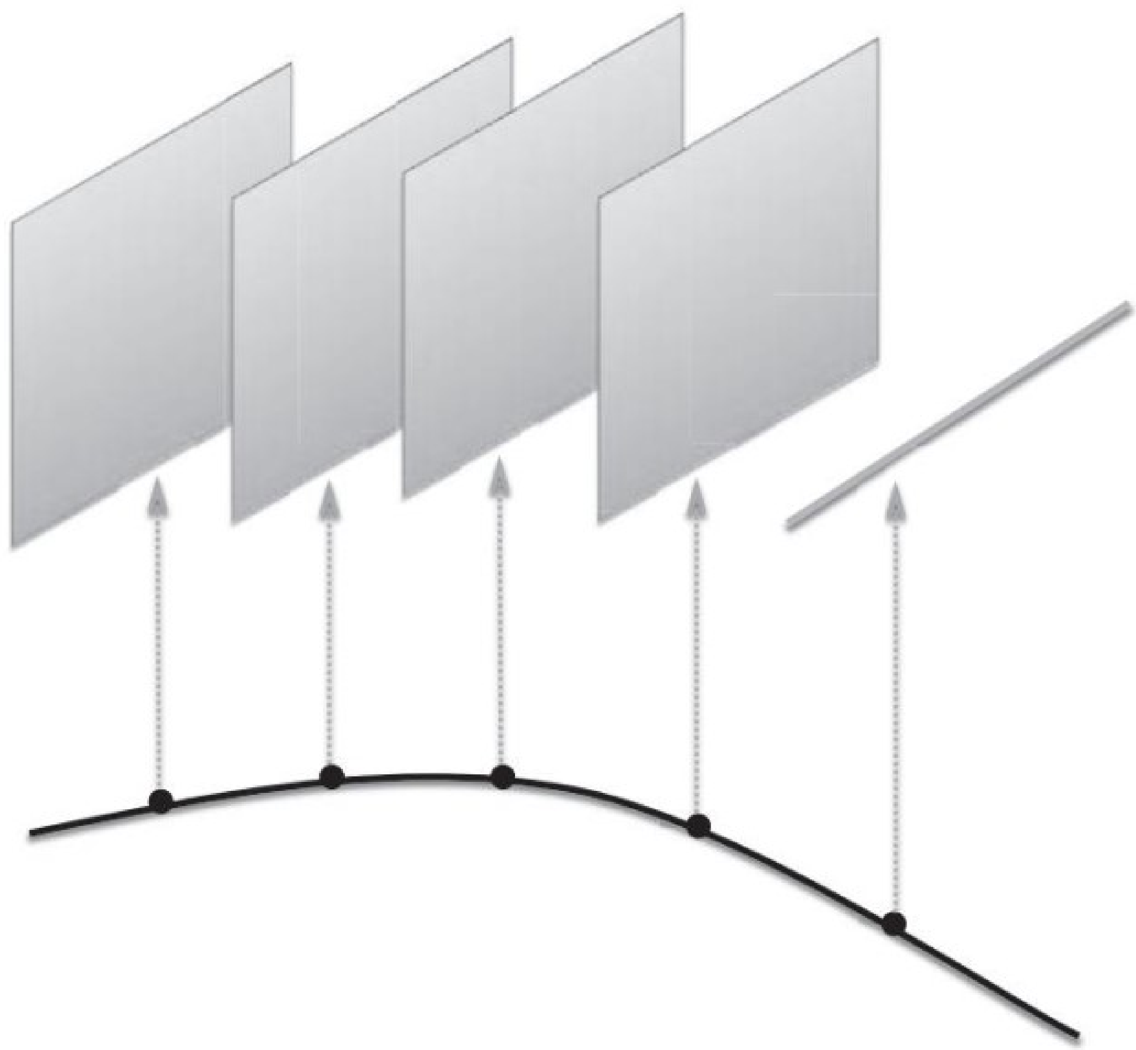
为了回答这个问题，我们先来回顾一下函数的概念。假设我们有一个几何图形，例如球面、圆或者甜甜圈的表面。我们把这个几何图形记作S。前面已经讨论过，数学家们把这些几何图形称作流形。流形S的函数f就是对流形S上的各点s赋值的规则，所赋的值叫作函数f在点s处的函数值，我们把它记作$f(s)$。

举个例子。我们以函数来表示温度，流形S表示我们所在的三维空间。在每个点s上，我们可以测量温度，得到一个数字。这样，我们就制定了一套为所有点赋值的规则，因此，这套规则就是一个函数。同样，测量大气压也可以形成一个函数。

我们再举一个更加抽象的例子。假设S为圆，圆上各点的值由角度确定，跟上一个例子一样，我们把这个角度记作φ，f为正弦函数。此时，该函数在圆上φ点处的函数值为$\sin(\varphi)$。如果$\varphi=30$度（以弧度表示的话，则为$\pi/6$），那么该正弦函数的值为1/2；如果$\varphi=60$度（即$\pi/3$），则函数值为3/2；依此类推。

现在，我们用向量空间来代替数字。此时，函数仍然表示为流形S上的各点s赋值的规则，但是，其所赋的值不是一个数字，而是一个向量空间。这样的规则叫作层，如果我们用符号F表示层，则为点s赋值的向量空间就记作$F(s)$。

因此，函数与层的区别就在于为流形S上的各点s所赋的值不同：对于函数，我们用数字为各点赋值；而对于层，我们用向量空间为各点赋值。对于一个已知层，为不同点s赋值的这些向量空间可以有不同的维数。例如，在下图中，这些向量空间大多是平面（即二维向量空间），也有一个向量空间是一条直线（即一维向量空间）。层是函数范畴化的结果，就像向量空间是数字范畴化的结果。



尽管以下内容超出了本书的范围，但我还是要加以说明。层的含义实际上不仅包括为流形上的各点赋值的一系列不相交的向量空间，

它还指一个已知层在不同点的“纤维结构”（fiber），必须根据一套精确的规则，在彼此间形成某种联系。

我们需要知道，函数与层之间具有很大的类似性。这个特点是由法国伟大的数学家亚历山大·格罗滕迪克（Alexander Grothendieck）发现的。

格罗滕迪克在现代数学领域中具有无与伦比的影响力。如果被问到20世纪下半叶最重要的数学家是谁，很多人一定会毫不犹豫地说：格罗滕迪克。他几乎凭借一己之力，开创了现代的代数几何学。此外，在他的影响下，我们改变了对数学的理解，开始把数学视为一个完整的体系。格罗滕迪克的研究眼光独到、理解深刻，在朗兰兹纲领的几何重构中，他帮助我们把函数与层联系起来，就充分地表现了他的这个特点。

为了让大家了解格罗滕迪克的理念，我们先从第8章中讨论过的有限域概念谈起。对于每一个质数p，总存在一个包含p个元素的有限域{0，1，2，…，p–1}。这些元素组成的数字系统能以p为模进行加减乘除运算，而且其运算规则与有理数及实数的运算规则相同。

但是，这套数字系统也有一些特殊的地方。如果从该有限域{0，1，2，…，p–1}中任取一个元素，并求其p次幂（按照前文所讨论的模p算法），就会发现得数即为选取的数字。

$$a^p=a\text{，模为}p$$

提出费马大定理的皮埃尔·费马证明了上述公式。费马大定理的证明颇为复杂，但上述公式并不难证明，甚至在书本的页边就能写下整个证明过程。为了将这个成果与费马大定理区分开，人们将它命名为“费马小定理”。

举个例子。假设$p=5$，有限域为{0，1，2，3，4}，我们来计算这些元素的5次幂。毫无疑问，0的任何次幂都是0，1的任何次幂也都是1。接下来，我们求2的5次幂，其得数为32。因为32=2+5×6，因此当模为5时，该得数等于2，跟我们预估的结果一样。我们再来求3的5次幂，其得数为243。因为243=3+5×48，因此当模为5时，该得数等于3。最后，我们以同样的方法求解4的5次幂，其得数为1024。而因为1024=4+5×204，因此当模为5时，该得数等于4。证明结束！我希望大家能验证一下当模为3时，$a^3=a$，以及当模为7时，$a^7=a$是否成立（在质数较大时，大家可能需要借助计算器才能完成费马小定理的验证工作）。

还有一个问题值得大家关注：RSA公钥密码在网上银行得到了普遍应用，其算法就是一个与之类似的方程式。

公式$a^p=a$的意义不仅在于它是一个美妙的发现，它还表明，求某一数字的p次幂的运算（将a升至a^p）是该有限域伽罗瓦群中的一个元素，叫作“弗罗贝尼乌斯对称操作”（Frobenius symmetry），或简称“弗罗贝尼乌斯”。研究发现，含有p个元素的有限域就是通过该弗罗贝尼乌斯对称操作而生成伽罗瓦群的。

* * *

我们现在回头看格罗滕迪克的观点。我们先从韦伊“罗塞塔石碑”的中间轨道入手，然后研究有限域平面上的曲线和有限域平面上更具一般性的流形。这些流形可以通过我们在第9章讨论过的多项方程式来定义。

$$y^2+y=x^3-x^2$$

假设我们有该流形的一个层，也就是将某个向量空间赋值给该流形上各点的一套规则，不过，层还具有其他内部结构。层的概念表明，定义已知流形的数字系统（在本例中就是有限域）的任何对称操作，都会产生该向量空间中的某个对称操作。而且，弗罗贝尼乌斯对称操作是该有限域伽罗瓦群的一个元素，必然产生该向量空间的某个对称操作（如旋转或扩张）。

现在，如果我们进行向量空间的对称操作，就可以据此产生一个数字。该过程有一个标准程序。例如，如果我们已有的向量空间是一条直线，我们根据弗罗贝尼乌斯对称操作得到的该空间的对称操作就是扩张：每个元素z对于数字A变换成Az。此时，我们赋予该对称操作的数字就是A。对于维数大于1的向量空间，我们求取该对称操作的“迹”（trace），用一个数字为点s赋值。

最简单的情况就是，弗罗贝尼乌斯对称操作作为恒等元将作用于该向量空间，此时其迹等于该向量空间的维数。在这种情况下，通过求取弗罗贝尼乌斯对称操作的迹，我们就能用向量空间的维数为该向量空间赋值。但是，如果弗罗贝尼乌斯对称操作不是恒等元，该结构赋予向量空间的值就会是更具一般性的数字，而不一定是自然数。

由此我们得出结论：如果我们有一个有限域$\{0，1，2，\ldots，p–1\}$平面上的流形S（韦伊“罗塞塔石碑”的中间轨道涉及该概念），且我们有S上的层F，那么我们以一个数字为S上的某一点s赋值，就可以得到一个关于S的函数。这样一来，我们发现，在韦伊“罗塞塔石碑”的中间轨道上，我们可以从层转换到函数。

格罗滕迪克把它叫作“层–函数字典”。通过上述步骤，我们把层转换为函数，而且我们发现对层的自然操作与对函数的自然操作相类似。例如，我们讨论过求取两个向量空间直和的方式，如果以相似的方式求取两个层的直和，就与求取两个函数的直和的操作相类似。

但是，我们不能从函数自然地转换回层。研究发现，只有某些函数，而不是所有函数，允许我们从函数转换回层。如果可以这样做，该层就会带有该函数不具有的大量信息，这些信息有助于我们了解该函数的核心内容。朗兰兹纲领（韦伊“罗塞塔石碑”的第二个轨道）中的函数大多可以由层转换得到，这个事实值得我们关注。

几百年来，数学界一直在研究函数，这是所有数学领域的一个核心概念。我们可以借助温度或大气压，以直觉的方式理解这个概念。不过，格罗滕迪克之前的数学家都没有意识到，在有限域平面上的流形（如有限域平面上的曲线）中，我们可以超越函数的概念，借助层的概念来帮助我们做研究。

我们可以把函数视为古代数学中的概念，而把层视为现代数学中的概念。格罗滕迪克指出，层是一个在很多方面都能发挥重要作用的基本概念，而函数只不过是层的影子，它已经风光不再。

层的发现促使数学学科在20世纪下半叶取得了长足的进展，原因在于层的内部结构要复杂得多，是更加重要、应用更广泛的研究对象。例如，层可以进行对称操作。如果我们把函数提升为层，我们就可以研究这些对称操作，其效果远非只借助函数的研究可以比拟的。

* * *

对于我们来说，更重要的问题是，层的概念适用于韦伊“罗塞塔石碑”中间和右侧的两个轨道，为我们将朗兰兹纲领由中间的轨道向右侧的轨道推广，开辟了一条新的途径。

在“罗塞塔石碑”的右侧轨道中，我们研究的是在复数范围内定义的流形，例如球面或甜甜圈表面等黎曼曲面。在这种情况下，出现在“罗塞塔石碑”左侧和中间轨道上的自守函数并没有多大的研究价值。但是，层则与之不同，左侧和中间轨道上的层是有研究价值的。

因此，如果我们在中间的轨道上用层来取代函数，就能实现中间轨道与右侧轨道之间的相似性。

简言之，当我们从韦伊“罗塞塔石碑”的中间轨道转换到右侧轨道时，必须对拥有朗兰兹纲领所预测的关系的双方做一些调整，这是因为伽罗瓦群与自守函数这两个概念在黎曼曲面几何体系中没有直接对应的对象。首先，我们把黎曼曲面的基本群作为伽罗瓦群的类比对象。其次，我们考虑属性与自守函数相类似的层，而不是去考虑自守函数。我们把这些层称为“自守层”（automorphic sheaves）。

我们用下表来展示这些调整。在表中，我们列出“罗塞塔石碑”的三个轨道，并把该轨道中拥有朗兰兹纲领所预测的关系的两个对象的名称，列在该轨道下面。

数论	有限域平面上的曲线	黎曼曲面
伽罗瓦群	伽罗瓦群	基本群
自守函数	自守函数或自守层	自守层

我们现在需要解决的问题，就是构建这些自守层。研究发现，构建这些自守层难度极高。20世纪80年代初，德林费尔德[在皮埃尔·德利涅（Pierre Deligne）早先发表的研究成果的基础上]首先提出了在最简单情况下的构建方案。几年后，热拉尔·洛蒙进一步发展了德林费尔德的方法。

我与德林费尔德结识后，他告诉我，他已经找到了构建自守层的全新方法，但这个新方法的成败取决于某个猜想，而我可以根据与费金合作实现的卡茨–穆迪代数研究成果，去完成该猜想的证明工作。我简直不敢相信，我的研究成果竟然可以在朗兰兹纲领的研究中得到应用！

一想到自己有可能为朗兰兹纲领的研究做出贡献，我就激动不已。我迫切希望了解有关朗兰兹纲领的所有研究成果。那年春天，我几乎每天都会跑到德林费尔德在哈佛大学的办公室，死缠烂打地提出一个又一个有关朗兰兹纲领的问题。德林费尔德耐心地回答了我的所有问题，还向我询问了我与费金的合作成果，因为这些成果的具体内容对于他正在研究的问题具有至关重要的作用。剩下的时间我则泡在哈佛大学的图书馆中，如饥似渴地阅读跟朗兰兹纲领相关的文献资料。这个领域的诱惑力太大了，每天晚上我都尽可能地早点儿入睡，以便第二天早晨我能尽早来到图书馆研究朗兰兹纲领。我知道，我即将开始研究我一生中最重要的项目。

* * *

然而，在那个春季学期临近期末的时候，一些不好的事情发生了，使我再次陷入当年参加莫斯科大学招生考试时的那种恐怖的漩涡。

一天，维克多·卡茨从他在剑桥市的家中给我打电话。他告诉我，有人邀请时任莫斯科大学校长的安纳托利·洛古诺夫（Anatoly Logunov）来麻省理工学院的物理系发表演讲。这个家伙是犹太裔学生在莫斯科大学招生考试中遭遇歧视的直接责任人，当听说麻省理工学院竟然邀请他发表演讲时，卡茨和众多同事都怒不可遏。他们认为那个家伙的所作所为是犯罪行为，这次邀请无异于一个丑闻。

洛古诺夫权势滔天，他不仅是莫斯科大学的校长、高能物理研究所的所长，还拥有苏联中央委员会委员及其他头衔。为什么麻省理工学院会邀请他呢？卡茨和几名同事根本不管邀请者是出于什么原因，他们径直提出了抗议，要求取消这次活动。几轮协商之后，他们达成了一个妥协性方案：洛古诺夫可以到麻省理工学院发表演讲，但在演讲结束后，他必须和与会者公开讨论莫斯科大学当时的情势，让大家

有机会就歧视犹太裔学生问题与他当面对质。这种公开讨论的架势有点儿像市政厅会议。

卡茨自然希望我参加这次大会，用我的亲身经历作为第一手证据，揭露洛古诺夫领导下的莫斯科大学的黑幕。我有点儿不情愿，因为我知道，洛古诺夫肯定会带一些“助手”过来，他们会把整个会议经过都记录在案。我还计划在那年夏天回国呢。如果我的证词使洛古诺夫这位苏联高官感到不舒服或难堪，我将会遭遇大麻烦。至少，他们可以阻止我离开苏联再返回哈佛大学。不过，我无法拒绝卡茨的请求。我知道我的证词至关重要，我告诉他，我愿意参加，如有需要，我也愿意说出我的遭遇。卡茨努力地鼓励我。

“别担心，埃蒂克，”他说，“如果他们因为这件事把你逮捕入狱，我会想尽一切办法营救你。”

洛古诺夫将接受公开质询的消息迅速传开了，活动当天演讲大厅里挤满了人，等着他发表演讲。当然，人们并不是希望在学术上有所收获，大家都清楚洛古诺夫的物理知识水平比较低，他希望在研究中证明爱因斯坦的相对论是不正确的（我不知道他为什么设定了这样一个目标）。不出所料，他在演讲中介绍的“新”万有引力理论并没有多少实质性内容。不过，这次演讲有很多地方都显得很奇怪。洛古诺夫没有用英语而是用俄语发表演讲。一个西装革履的高个子操着流利的英语，在一旁做同声传译。

在演讲正式开始之前，麻省理工学院的一个工作人员用一种怪异的方式介绍了洛古诺夫。他用幻灯片放映了一篇英语论文的第一页，这篇论文是洛古诺夫与几个人合作完成的，于10年前发表。我猜测，这样做是为了表明洛古诺夫并非一个十足的白痴。不过，作为成果被列出的洛古诺夫的论文都发表在他自己担任审阅人的那些杂志上。我从未见过这样的介绍方式，显而易见，洛古诺夫之所以受到麻省理工学院的邀请，并不是因为他在学术研究方面的出色表现。

在他演讲的过程中，没有人站起来表示抗议，不过卡茨在听众当中分发了一些见不得光的文件的复印件，其中包括10年前的一名学生的成绩单。这名犹太裔学生的所有学科成绩都是A，却被莫斯科大学以“学习成绩不合格”的理由在大学的最后一年开除。成绩单上有一条简短的批注，说这名学生被专门派驻到莫斯科犹太教堂的密探列为监控对象。

演讲结束后，大家来到另一个房间，围着一张长方形桌子坐了下来。洛古诺夫坐在桌子的一侧，他的两边各有一名带着翻译任务的便衣“助手”。卡茨和其他抗议者则坐在他们的正对面。我与几名朋友静静地坐在与洛古诺夫同侧的位置上，这样不会引起他的注意。

卡茨等人率先发言。他们指出有很多犹太裔学生被挡在莫斯科大学的门外，他们希望洛古诺夫能以莫斯科大学校长的身份，对此事发表他的看法。当然，无论他们对洛古诺夫的行为提出什么质疑，洛古诺夫都强硬地拒绝承认。后来，一位便衣用英语说：“实际上，洛古诺夫教授对很多犹太裔学生的职业发展都提供过帮助。大家知道，他本人比较谦逊，不愿意说这些，所以由我代他说。”

接着，另一位便衣对卡茨等人说：“你们要么提出证据，要么闭嘴。如果你们希望讨论某些具体事件，就赶快提出来。洛古诺夫教授很忙，他还有一些重要事务需要处理。”

卡茨说：“我们的确有一个具体事件，想跟你们谈一谈。”然后，他朝我做了个手势。

我站起来，大家都看着我，洛古诺夫和他的两个“助手”也看着我，他们的脸上露出一丝担心的神情。就这样，我开始和洛古诺夫直接对质。

“很有意思。”洛古诺夫用俄语说（这句话需要翻译成英语，让所有人都听到）。然后他又轻声地对助手说了一句话，而我刚好能听清他说的话：“把他的名字记下来。”

我承认自己有点儿害怕，但我已经骑虎难下，只能勇往直前。我先做了一下自我介绍，然后接着说道：“6年前，我参加了莫斯科大学力学与数学系的招生考试，但我落榜了。”

我简单地介绍了那次考试的情况，房间里一片沉寂。这是我以洛古诺夫行径的受害者身份给出的“具体”证词，他无法否认当时发生的那些事情。这时候，那两个便衣站了出来，希望挽回颜面。

“你没考上莫斯科大学，那么之后你又报考了哪所学校呢？”其中一名便衣问我。

“我上了石油天然气学院。”

“他上了石油天然气学院。”这名便衣为洛古诺夫做了翻译。洛古诺夫使劲儿地点点头。是啊，在莫斯科能够招收像我这样的犹太裔学生的学校并不多，石油天然气学院就是其中一所，这个情况他当然知道。

“那么，”这名便衣接着说，“也许是因为石油天然气学院的竞争程度没有莫斯科大学那么激烈，所以你才没考上莫斯科大学吧？”

真实情况当然不是这样。我敢确定，如果没有遭到歧视，我报考力学与数学系肯定会被录取。据我所知，在那4场考试中只要拿到一个B和三个C，就可以被录取。报考石油天然气学院反而竞争比较激烈。这时候，卡茨插了一句：“爱德华在高中时期就在数学方面取得了富有创造力的研究成果。他虽然没考上莫斯科大学，但是在随后不到5年的时间里，他在年仅21岁时就应邀以客座教授的身份来到哈佛大学。你

的意思是说，哈佛大学客座教授的门槛比莫斯科大学的招生考试门槛还低吗？”

在接下来的很长一段时间里，没有一个人吭声。然后，洛古诺夫突然激动起来。

“我无法容忍这样的事！”他大声吼道，“我要调查清楚当年是谁导致这名优秀的年轻人落榜的。我要惩罚他，我绝不允许这样的事情在莫斯科大学发生！”

接着，他又喋喋不休地说了一些诸如此类的话。

我们又能说些什么呢？在座的人都知道，洛古诺夫不过是在装腔作势，实际上他是不会采取任何措施的。洛古诺夫很聪明，他假装针对我的事大发雷霆，其实是在转移大家的注意力，使人们忽略一个更普遍的问题：由于莫斯科大学的这些歧视性政策得到了学校高层领导，包括校长本人的明确赞同，除我以外，还有数以千计的犹太裔学生也被无情地挡在学校门外。

我们无法在这次会上详细列举这些学生的例子，去证明力学与数学系的确处心积虑地在招生考试中实行了反犹太政策。我能够与“罪魁祸首”当堂对质，并迫使他承认他的下属对我的所作所为确实不公平，这个结果在一定程度上是令人满意的。但是我们也清楚，那个更普遍的问题并没有得到解决。

看到洛古诺夫被与会者群起而攻之，他的邀请人显得非常尴尬，希望尽快结束这次活动。他们宣布休会，并带着洛古诺夫匆匆退场。之后，洛古诺夫便再也没有返回会场。

第 15 章

数学领域的美丽邂逅

1990年秋，我成为哈佛大学的一名博士研究生。想要从客座教授转变成哈佛大学的一名正式教师，获得博士学位是一个不可或缺的环节。约瑟夫·伯恩斯坦同意担任我的导师，此时，我收集的研究材料也已经足够让我完成博士论文了。阿瑟·杰斐找到研究生院的院长，院长同意对我免除在校学习两年的要求（通常，博士研究生必须在校学习两年）。这样一来，我就可以在一年之内完成博士学业，我从客座教授“降职”为博士研究生的时间也不会很长。

在这一年的时间里，我完成了博士论文。我的这篇论文研究的是一个全新的课题，它源于那年春天我与德林费尔德关于朗兰兹纲领的几次讨论。下面，我以电影剧本的形式来展现其中的一次讨论。

内景：德林费尔德在哈佛大学的办公室。

德林费尔德正在黑板前踱步，爱德华坐在椅子上记笔记，旁边的桌子上放着一只茶杯。

德林费尔德：也就是说，谷山–志村–韦伊猜想找出了三次方程式与模形式之间的联系，朗兰兹则更进一步，他猜测两者之间存在一种更具一般性的关系，其中，模形式被李群的自守表示所取代。

爱德华：自守表示是什么意思？

德林费尔德（停顿了很长时间）：现在，我们无须知道它的精确定义，你可以在阅读材料中找到。重要的是，它是李群G的一个表示，例如，球体旋转群SO(3)的表示。

爱德华：好的。那么，这些自守表示与哪些东西有关联呢？

德林费尔德：嗯，这是我们最应该关注的内容。朗兰兹预测，它们应该与另一个李群中的伽罗瓦群的表示有关。

爱德华： 我明白了。你是说这个李群与李群*G*不是同一个群，对吗？

德林费尔德： 对！这是另一个李群，叫作李群*G*的朗兰兹对偶群。

德林费尔德在黑板上写出符号L_G。

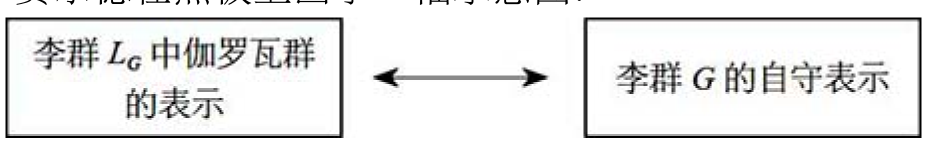
爱德华： *L*是指朗兰兹吗？

德林费尔德（露出一丝微笑）：朗兰兹最初的目的是希望了解*L*函数，因此，他把这个群称作*L*群。

爱德华： 你看我这样的理解对不对：对于每个李群*G*，总存在另一个李群L_G。

德林费尔德： 对，它会出现在朗兰兹关系中。我们可以用这样一幅图来表示。

德林费尔德在黑板上画了一幅示意图：



爱德华： 我还是不明白，至少现在不明白。我换一个简单一点儿的问题，比如，SO(3)群的朗兰兹对偶群是什么？

德林费尔德： 这个问题比较简单，那就是SO(3)的“双层覆盖”（double cover）。你还记得杯子游戏吗？

爱德华： 杯子游戏？嗯，我记得。

镜头切换至内景： 哈佛研究生的聚会。

十几名20岁出头的学生一边喝着啤酒或葡萄酒，一边聊天。爱德华正在与其中一名学生交谈。

学生：我来告诉你怎么玩吧。

这个学生拿出一个装有葡萄酒的塑料杯，将其托在右手掌上。然后，他开始转动手掌和胳膊（如下文中的一组照片所示）。转了一圈（360度）之后，他的胳膊呈扭曲状。他让茶杯口一直保持朝上，接着转动他的胳膊和手掌，又转了一整圈。太神奇了，他的胳膊和茶杯竟然回到了转动之前的样子。

另一名学生：我听说菲律宾有一种传统的葡萄酒舞蹈，跳舞时他们的双手做的就是这样的动作。

他端起两杯啤酒，试着同时转动双手，但是他的手无法托稳杯子，啤酒洒了出来。大家哄堂大笑。

镜头切换至内景：德林费尔德的办公室。

德林费尔德：这个小游戏反映了一个事实：群SO(3)有一个闭合的非凡路径，如果把这个路径旋转两次，它就会变成平凡路径。

爱德华：我明白了。托着杯子转动第一圈时，胳膊会扭曲，这就像群SO(3)的非凡路径。

他端起桌上的那杯茶，开始做胳膊转动第一圈的动作。





爱德华： 你以为转动第二圈会使胳膊扭曲得更厉害。但实际上，在转了第二圈之后，胳膊反而一点儿也不扭曲。

爱德华完成了这个动作。

德林费尔德： 完全正确。

爱德华： 这与朗兰兹对偶群有什么关系呢?

德林费尔德： 群SO(3)的朗兰兹对偶群就是群SO(3)的双层覆盖，因此……

爱德华： 因此，对于群SO(3)的每个元素而言，在朗兰兹对偶群中都有两个元素与之对应。

德林费尔德：正因为如此，这个新的群不存在任何闭合的非凡路径。

爱德华：也就是说，朗兰兹对偶群可以消除那些滑稽有趣的扭曲。

德林费尔德：没错。乍一看，似乎区别不大，但实际上，区别非常明显。比如，电子、夸克等构建物质的基本粒子，与光子等承载基本粒子相互作用的粒子，在性质上存在巨大的差异。对于更一般的李群来说，它与其朗兰兹对偶群之间的差异更显著。事实上，在很多情况下，这两个对偶群之间没有明显的联系。

爱德华：对偶群为什么会出现在朗兰兹关系中呢？真的太神奇了！

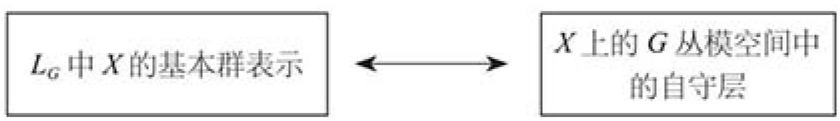
德林费尔德：这个原因我们还不清楚。

朗兰兹对偶群可以把李群成对地联系起来：对于每个李群G，都存在一个朗兰兹对偶群L_G，而且L_G的对偶群也是李群G。朗兰兹纲领在两种不同类型的对象（一个对象属于数论领域，另一个属于调和分析领域）之间建立了联系，这已经够让人们吃惊的了。而将对偶的两个李群G和L_G，置于这种联系的两端，就更加令人难以置信了。

我们在前面讨论过，朗兰兹纲领把数学王国中的一个个独立的大陆连接在一起。假如我们把这些大陆类比成欧洲和北美洲，我们就有办法使欧洲与北美洲的居民形成一一对应的关系。而且，假设在这种关系中，体重、身高与年龄等属性能够严格地相互对应，但是性别却错位对应：每名男性对应一名女性，每名女性则对应一名男性。李群与其朗兰兹对偶群的对应关系，就与这种错位对应十分相似。

这种错位对应实际上是朗兰兹纲领最为神秘的一个方面。我们已经掌握了好几种描述对偶群形成的方法，但是我们仍然不清楚其形成的缘由，因此，我们试图（通过韦伊的“罗塞塔石碑”）将朗兰兹纲领推广到数学学科的其他分支，以及量子物理领域中去。具体的推广过程，我们将在下一章中讨论。我们希望找出更多实例，通过研究朗兰兹对偶群的形成过程，找到更多线索，帮助我们了解这些对偶群形成的缘由及其含义。

我们现在来看一下韦伊“罗塞塔石碑”中涉及黎曼曲面的右侧轨道。在上一章中我们已经讨论过，朗兰兹关系到这个轨道就结束了。根据角色安排，与李群*G*有关的自守函数（或自守表示）这个角色由“自守层”来扮演。研究发现，这些自守层“生活”在与黎曼曲面*X*和群*G*有关的某个空间中。这个空间被称作*X*上的*G*丛（G-bundle）模空间，其具体含义跟现在我们讨论的内容关系不大。第9章已经介绍过，构成朗兰兹关系的另一方是伽罗瓦群，该角色由该黎曼曲面的基本群扮演。我们发现，几何朗兰兹关系（亦称几何朗兰兹对应）可以用下图表示：



这意味着，对于L_G中基本群的每个表示，我们都能找到一个自守层与之对应。至于如何完成这个操作，德林费尔德有一个新颖的想法。

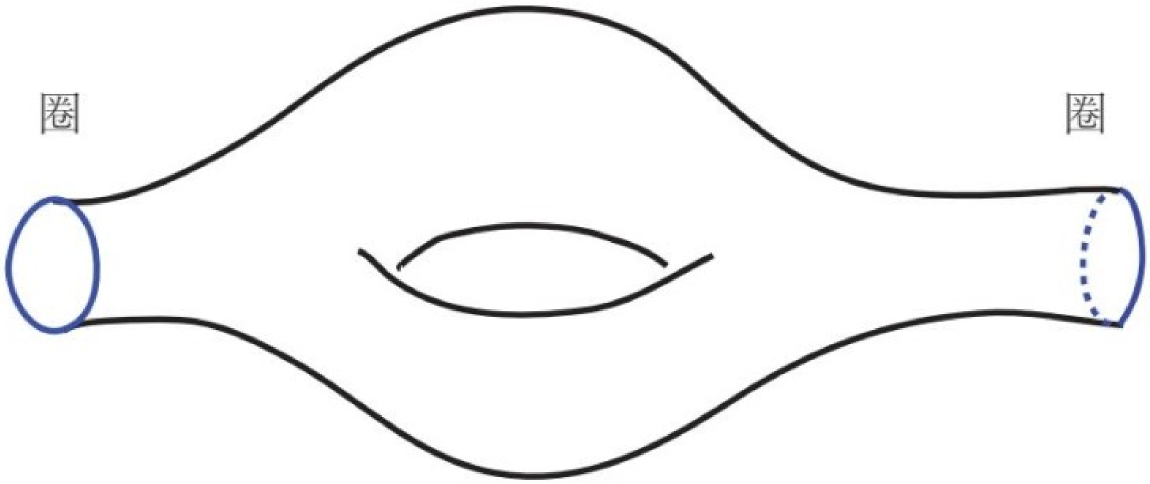
内景：德林费尔德的办公室。

德林费尔德：因此，我们必须找到构建这些自守层的系统性方法。我认为卡茨–穆迪代数表示可以实现这个目标。

爱德华：为什么？

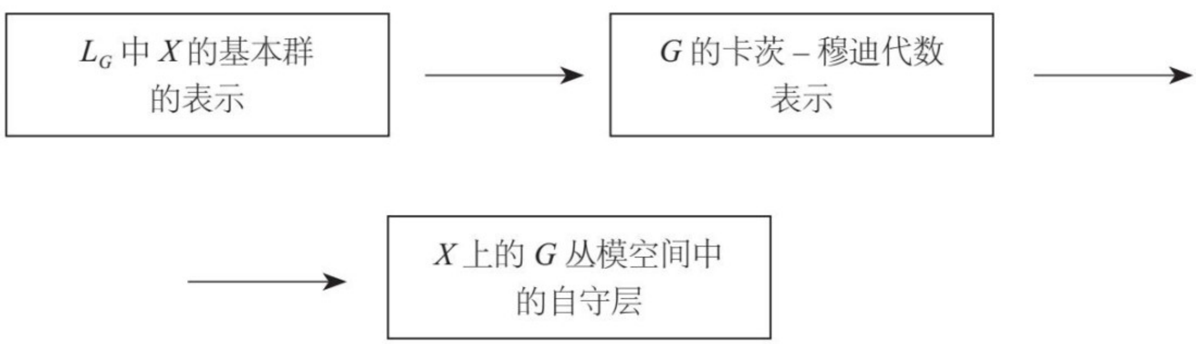
德林费尔德： 我们现在研究的是黎曼曲面，黎曼曲面可能有边线，边线会构成圈。

德林费尔德在黑板上画了一幅图。



德林费尔德： 黎曼曲面上的圈可以使我们联系到圈群，进而联系到卡茨–穆迪代数。通过这种联系，我们可以对卡茨–穆迪代数表示进行转换，使其变成该黎曼曲面上G丛模空间中的层。细节这里就不讨论了，整个过程我用这幅示意图来表示。

他在黑板上画了一幅示意图。



德林费尔德： 我知道图中第二个箭头的含义，但我不知道应该如何理解第一个箭头。费金向我介绍了你在卡茨–穆迪代数表示领域的研究，我认为你可以把那些研究应用到这里。

爱德华：但是，李群G的卡茨–穆迪代数表示应该对朗兰兹对偶群L_G“有所了解”才对啊。

德林费尔德：没错。

爱德华：这怎么可能呢?

德林费尔德：是啊，这就是你要解决的问题。

在我看来，这段对话有点儿像电影《黑客帝国》里尼奥与墨菲斯的对白。这个任务既让我觉得兴奋，又让我有点儿担心：我真能在这个领域有所发现吗?

为了向大家解释我解决这个问题的方法，我先要解释构建黎曼曲面基本群表示的一个有效方法。我们通常会利用微分方程来实现这个目的。

微分方程是将函数与其导函数结合起来的一种方程式，我以在笔直公路上行驶的汽车为例来解释微分方程。公路有一个坐标，我们把它记作x，在时间点t上汽车所处的位置用函数$x(t)$来表示，例如$x(t)=t^2$。

汽车的速率是汽车行驶过的距离与其所花时间Δt的比值：

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

如果汽车匀速行驶，那么我们所取的Δt值对结果不会有影响。但是，如果汽车的速度在变化，那么Δt越小，所得结果就越接近于汽车在时间点t上的速度。为了准确地计算出汽车在该时点的即时速度，我

们需要计算当Δt趋近于0时该比值的极限。该极限就是$x(t)$的导函数，记作$x'(t)$。

例如，如果$x(t)=t^2$，则$x'(t)=2t$。其一般形式为，如果$x(t)=t^n$，那么$x'(t)=nt^{n-1}$。这个结果不难得出，但在这里我们不做讨论。

自然界的很多定理都可以用微分方程（或者包含函数及其导函数的方程）来表示。例如，我们在下一章要讨论的描述电磁现象的麦克斯韦方程组就是微分方程，描述万有引力的爱因斯坦方程也是微分方程。事实上，大多数数学模型（无论涉及物理、生物、化学还是金融市场）都用到了微分方程。即使是对于涉及个人财务状况（例如如何计算复利）的最简单的问题，我们也需要使用微分方程。

下面是微分方程的一个例子：

$$x'(t)=\frac{2x(t)}{t}$$

函数$x(t)=t^2$是该微分方程的一个根。$x'(t)=2t$，$2x(t)/t=2t^2/t=2t$，也就是说，将$x(t)=t^2$代入方程式两边，会得到相同的结果——$2t$。此外，我们还发现，该方程式的所有根都具有$x(t)=Ct^2$的形式，其中C是与t无关的实数（C表示“常数”）。例如，$x(t)=5t^2$是一个根。

同理，下面的微分方程：

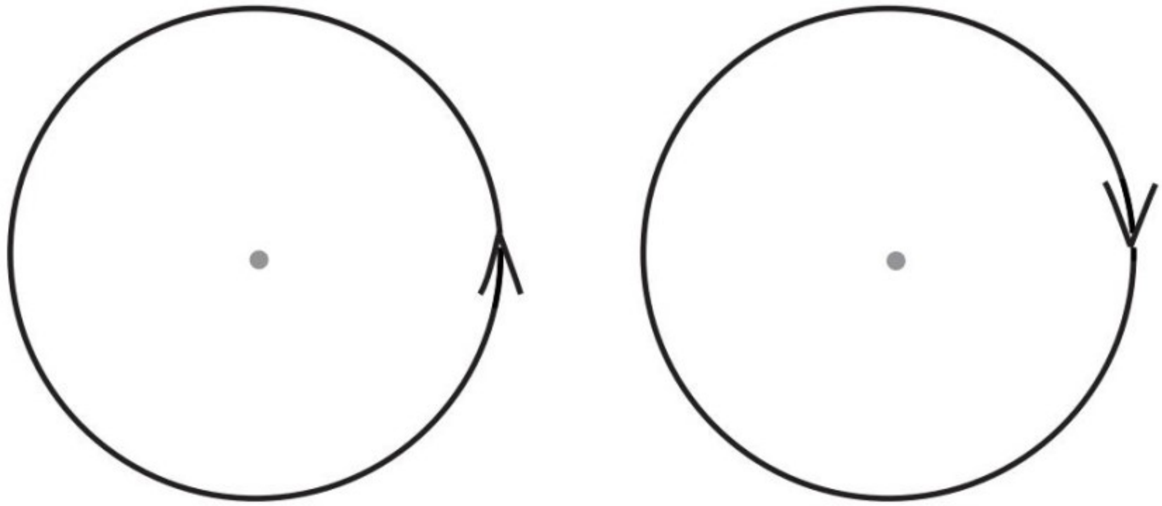
$$x'(t)=\frac{nx(t)}{t}$$

其根的形式为$x(t)=Ct^n$，其中C为任意实数。

在上述方程式中，n可以为负整数，此时方程式仍然有意义，$x(t)=Ct^n$也有意义。但是，该方程式在$t=0$时没有意义，因此，我们不考虑$t=0$的情况。在t不等于零的情况下，n可以是任意有理数，甚至是任意实数。

在该微分方程的原始表达式中，我们把t定义为时间，因此我们假设t是实数。现在，我们假设t是复数，因此t的表达式为$r+s\sqrt{-1}$，r和s为实数。我们在第9章讨论过，复数可以借助坐标数字r和s表示成平面上的点。t一旦取值为复数，$x(t)$实际上就是平面上的函数，准确地说，应该是去掉了一个点的平面，因为在$t=0$时，函数$x(t)$没有意义。$t=0$时的点就是平面的原点（坐标r和s都等于零），所以，$x(t)$是去掉了一个点（即原点）的平面的函数。

我们在第9章讨论过，基本群的元素是闭合路径。现在，我们考虑去掉一个点的平面的基本群。在这种情况下，所有闭合路径都有一个“回转数”（winding number）：路径围绕被去掉的那个点运动的圈数。如果路径是逆时针方向的，我们就给赋予该数字正值，如果路径是顺时针方向是，则赋予该数字负值。下图给出了回转数为+1和–1的闭合路径。



回转数为 +1　　　　回转数为 –1

对于旋转两周然后与自身相交并回到起始点的路径，其回转数为+2或–2。其他的复杂路径依此类推。

下面，我们回到微分方程：

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

其中，n是任意实数，t为复数。该方程式有一个根为$x(t)=t^n$，不过，这里会有一个令人吃惊的发现：如果n不是整数，那么，在我们在沿着平面上一条回到起始点的闭合路径计算方程根的值时，方程根在终点处的值，不一定等于它在起点处的值，而是等于起点处的值与一个复数的乘积。在这种情况下，我们说该方程根在该路径上具有单值性。

如果有人说，我们在运动了一整圈之后所处的位置发生了变化，那么我们可能会认为这个说法有悖常识，甚至自相矛盾。但是，实际情况的确像他们说的那样，这取决于我们对运动一整圈的理解。我们

可以穿过一个闭合路径，回到某个属性（例如空间位置）上的同一点，但是，在运动的过程中，其他属性却完全有可能发生改变。

我们来看下面这个例子。2010年3月14日，瑞克在一次晚宴上遇到了伊尔莎，并对她一见钟情。伊尔莎虽然对瑞克并没有多少特别的感觉，但她同意与后者交往。在一次又一次约会之后，伊尔莎逐渐爱上了瑞克。是啊，他风趣诙谐，反应机敏，又非常关心她。很自然地，伊尔莎就坠入了爱河，她甚至在脸谱网上把自己的状态改为“热恋中”。瑞克同样如此。时光飞逝，到了2011年3月14日，距他们第一次见面已经过去一年了。从日历上来看（如果不考虑年份，只看日期），瑞克和伊尔莎经历了一个完整的周期。但是，两人的情况与最初时已经不同了。他们相遇时，瑞克爱上了伊尔莎，而伊尔莎并没有爱上瑞克。一年后的情况就不一样了：他们对对方的爱可能是相当的；也有可能是伊尔莎爱得死心塌地，而瑞克的爱情则是不咸不淡；甚至有可能瑞克已经不爱伊尔莎了，转而与别人秘密约会。我们无从知晓这些，我们需要关注的是，尽管他们回到了日历上的同一个日期——3月14日，但他们对对方的感情却发生了显著的变化。

不过，我父亲却认为这个例子容易让人迷惑，因为我们会形成错觉，以为瑞克和伊尔莎回到了以前的某个时间。这是不可能的，我强调的只是某种具体属性，即日期。从这个意义上看，从2010年3月14日到2011年3月14日，的确是一个完整的周期。

不过，考虑空间的闭合路径可能会取得更好的效果。因此，我们假设瑞克和伊尔莎交往后他们便一起周游世界。在旅途中，他们的感情不断升温，等他们回到出发地点（他们的家乡）时，他们彼此之间的感情已经发生了变化。

在第一种情况下，我们有一条闭合的时间路径（具体地说，就是日期），而在第二种情况下，我们有一条闭合的空间路径。但是，我们经由两条不同的路径得出的结论是相似的：双方的关系可能沿着一

条闭合路径发生了变化。这两个假设反映了一个现象，即爱情的单值性。

在数学上，我们可以用数字x表示瑞克对伊尔莎的感情，用数字y表示伊尔莎对瑞克的感情。因此，在各个时点上他们的相互关系就可以表示成平面上坐标为（x，y）的点。例如，在第一种假设中，他们第一天相遇时的关系坐标为（1，0）。然后，当他们的相互关系沿一条闭合路径（时间或空间路径）运动时，点的位置也会随之变化。因此，他们的相互关系可以利用xy平面上的曲线表示，单值性表明曲线的起点与终点的值是不同的。

我们再举一个不那么浪漫的例子。假设你沿着螺旋形楼梯爬了一层楼。从你在地面上的投影来看，你走的路线是一个环形。但是，另一个属性（海拔高度）也改变了：你爬高了一层。这也是单值性的表现。我们可以把这个例子与第一个例子联系起来：日历就像一个螺旋，一年365天就像地面上的环形，而年份则像海拔高度。因此，从一个给定的日期，例如2010年3月14日开始，运动到一年后的同一个日期，这种变化与跟爬楼梯十分相似。

我们接着讨论上述微分方程的根的情况。平面上的闭合路径就像你运动轨迹的投影在地面上形成的那条闭合路径，而方程式的根则像你在楼梯上所处的海拔高度。从这个角度看就不难理解，在转了一整圈之后，为什么方程式的根变得与初始值不同了。

计算这两个值的比值，我们就能得到方程式的根在这条路径上的单值。研究发现，该单值性可以被视为循环群的一个元素。举个例子，假设我们可以把手杖糖弯曲变成环形，糖上的红色条纹就形成了一个圈，沿着红色条纹的路径则像上述平面上的闭合路径。因此，红色条纹圈就是我们讨论的方程式的根。我们沿着这条红色条纹在糖上走一圈，通常会回到一个与起点不同的位置。两者位置之间的差异就像方程根的单值性，对应的是将糖圈旋转某个角度的操作。

对于回转数为+1的闭合路径而言，其单值是循环群中与360*n*度旋转操作相对应的元素。（例如，如果*n*等于1/6，那么我们为这条路径赋值360/6 =60度。）同理，对于回转数为ω的闭合路径而言，其单值就是360ωn度旋转操作。

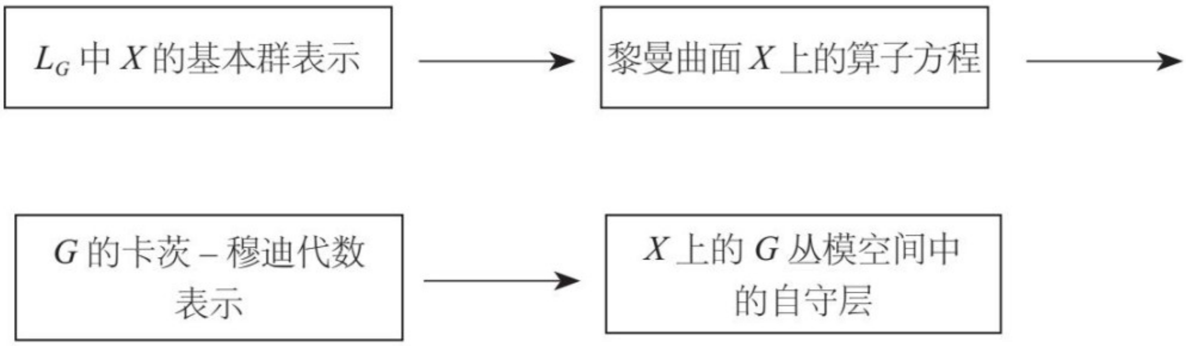
上述讨论表明，在去掉一个点的平面上，不同路径的单值会产生循环群中基本群的一个表示。在对这个结果进行推广的过程中我们发现，通过计算任意黎曼曲面（跟上述情况一样，该曲面可能会去掉某些点）上微分方程的单值，我们可以构建出该曲面基本群的表示。这些微分方程比上面讨论的更复杂，但是在曲面上某个点的邻域，它们的复杂程度与我们所讨论的基本差不多。我们可以用类似的方法，通过计算更复杂的方程根的单值，为循环群以外的李群中的给定黎曼曲面构建基本群表示。例如，我们可以在群SO(3)中构建基本群表示。

我们接着讨论我遇到的这个难题：从李群*G*着手，求取对应的卡茨–穆迪代数表示。德林费尔德的猜想需要找出该卡茨–穆迪代数表示与朗兰兹对偶群L_G中基本群表示之间的联系。

第一步是，找到合适的、单值在L_G中取值的微分方程，用它来取代基本群表示。这个步骤更贴近代数的特点，因而与卡茨–穆迪代数领域也更接近。早在德林费尔德被“放逐”到乌法时，他就和索科洛夫合作，提出了适用于该步骤的微分方程类型（从本质上看，这些方程式对应的是我们上文讨论的去掉了一个点的平面）。随后，贝林森和德林费尔德将这个成果推广至任意黎曼曲面，并将所得到的微分方程命名为“oper”（算子方程）。

我在撰写博士论文时，以我与伯亚在莫斯科共同取得的研究成果为基础，以与朗兰兹对偶群L_G相对应的算子方程为参数，成功地构建了李群*G*的卡茨–穆迪代数表示。两者之间的确存在某种让人意想不到的联系：与李群*G*相关的卡茨–穆迪代数竟然“认识”朗兰兹对偶群L_G，

这与德林费尔德猜测的情况不谋而合。这样一来，他的研究计划就变成了下图所示的情况：



要证明我得出的这个结论，在技术上颇为棘手。我能解释朗兰兹对偶群是如何形成的，但是，即使在20多年后的今天，我仍然无法弄清楚其中的缘由。我解决了德林费尔德交给我的任务，但是一想到某个东西凭空出现，而我却无法了解其来龙去脉，我就会耿耿于怀，无法体会问题最终得到解决时的那种满足感。从那以后，寻找更完整的解释就成了我研究工作的一个内容。

这种情况并不少见。一个人证明了某个猜想，其他人就会验证这个证明过程，新的研究成果又会使该领域取得新的进展。但是，要真正了解这个领域，却需要几年甚至几十年的时间。我知道，即使我无法找到正确答案，我后面的一代又一代数学人也会继续攻克这个难关。不过，我自然更希望我能亲自完成这项任务。

贝林森和德林费尔德随后又利用我的博士论文中提出的这个猜想，（在韦伊"罗塞塔石碑"右侧的轨道上）成功地构建出美丽的几何学意义上的朗兰兹关系。他们的杰出成果为朗兰兹纲领的研究打开了新的篇章，在这个领域提出了颇具洞察力的新想法，也进一步拓展了这一研究领域。

后来，我在专著《圈群的朗兰兹对应》（*Langlands Correspondence for Loop Groups*）中对我在这个领域的研究成果[其中

有一部分成果是我与伯亚合作完成的，还有一部分成果是我与丹尼斯·盖茨哥利（Dennis Gaitsgory）合作完成的]进行了总结，这本书的英文版由剑桥大学出版社于2007年出版。20年前的那个晚上，我离开了伯亚的别墅，在回家的列车上创造了第一个卡茨–穆迪代数自由场实现公式。在埋头计算时我几乎没有意识到，从此以后我会走上研究朗兰兹纲领的漫漫征程。

在我的那本书中，我选用了自己最喜爱的诗人爱德华·埃斯特林·卡明斯（E. E. Cummings）在1931年写下的诗句作为引语。

晶莹剔透的几何学迈着轻盈的步履

从骄傲孤寂的代数王国穿梭而过

却与一母所生的冷冰冰的算术撞了个满怀……

在我眼中，这几句诗描述的正是我们在研究朗兰兹纲领时所追求的目标：将几何学、代数和算术（即数论）和谐地统一起来。这是现代社会的炼金术。

贝林森和德林费尔德的研究成果解决了数学领域中几个长期悬而未决的问题，同时又提出了一些新问题。数学研究具有这样的特点：每一次取得的研究成果都会把未知领域的面纱撩起一个角，但我们看到的却并非最终答案，而是新的问题或新的方向。因此，每一个发现都不会让我们功成身退，而是激励我们继续鼓起干劲儿，在求索的道路上大步前进。

* * *

1991年5月，我参加了哈佛大学的博士生毕业典礼。这次毕业典礼对我有着特别的意义，因为在毕业典礼上发言的是爱德华·谢瓦尔德纳泽（Eduard Shevardnadze），他是苏联政治经济改革的策划者之一。

此前不久，为了抗议波罗的海几个国家发生的暴力事件，威慑刚刚露头的独裁统治，他愤然辞去了苏联外交部部长的职务。

在毕业典礼的那个阳光灿烂、喜气洋洋的日子里，我只想对他说声“谢谢”，我要感谢他帮助了我，也帮助了祖国的千千万万的同胞。

他的发言结束后，我走上前去告诉他，得益于他发起的苏联政治经济改革，我获得了哈佛大学的博士学位。他操着带有迷人的格鲁吉亚口音的俄语，笑着对我说：“我非常高兴听到这个消息。祝愿你在研究中取得丰硕成果。”他停顿了一下，接着又说：“同时，祝你的生活美满幸福。”

第二天，我乘飞机去了意大利，维克多·卡茨邀请我出席他和意大利同事克拉多·德孔奇尼（Corrado De Concini）在比萨组织的一个会议。之后，我从比萨飞往科西嘉岛参加第二个会议，随后飞到日本京都，出席第三个会议。出席这些会议的都是对卡茨–穆迪代数及其在量子物理中的应用感兴趣的数学家和物理学家，我报告了我刚刚完成的研究项目。大多数与会者都是第一次听说朗兰兹纲领，他们无一例外地表现出浓厚的兴趣。现在回想当时的情境，我惊讶地发现，这些年来数学领域已经发生了翻天覆地的变化。如今，朗兰兹纲领已经被看作现代数学的一个基石，是众多学科中人们耳熟能详的一个概念。

这是我的第一次环球旅行。我接触到不同的文化，而数学是通用语言，把我们彼此联系在一起。一切都是那么美好，整个世界就像一个巨大的万花筒，蕴藏着无限的可能性。

第 16 章

地球人和火星人

前文中我们已经讨论过，朗兰兹纲领可以贯穿数论、有限域平面上的曲线乃至黎曼曲面，使数学中的多个分支领域发生关联，就连卡茨–穆迪代数表示也被融入其中。由此我们发现，在这些不同的数学领域中存在着相同的模式和现象。虽然它们表现形式不一，但我们总能找到一些相同的特征（例如朗兰兹对偶群），这些共同特征又指向所有数学分支中披着神秘面纱的底层结构（我们也许可以称之为源代码）。从这个意义上看，朗兰兹纲领就是数学领域中的大统一理论。

我们还发现，我们在学校里学习的一些最普通的数学概念（数字、函数、方程式等），有时相互交织，有时披着层层伪装，有时又会被分解得支离破碎；它们并不像看上去的那样简单易懂。现代数学中引入了很多内容深奥、应用广泛的概念与想法，如向量空间、对称群、以质数为模的运算、层等。因此，数学远比我们看到的要丰富多彩，朗兰兹纲领更让我们领略到数字的神秘。到目前为止，我们仍无法窥见数学的全貌。我们就像一群考古学家，摆在我们面前的是一堆古文物碎片，我们需要不断地收集它们，然后努力地完成拼装工作。每一个新证据都会给我们带来新的认识，都是揭示谜底的新工具。但是，每次有新发现，我们又会觉得自己面对的是无穷无尽的变化，很难摸清头绪。

在德林费尔德的帮助下，我在研究卡茨–穆迪代数时结合了朗兰兹纲领，从而为研究这个神秘世界找到了一个切入点。朗兰兹纲领博大精深，涉及数学研究的方方面面，甫一接触我就深深为之着迷。我拼命钻研与朗兰兹纲领有关的所有观点和想法，而且，我的大部分研究工作要么直接以朗兰兹纲领为对象，要么会受到朗兰兹纲领这样或那样的启发。我游走于数学王国的各个大陆之间，学习各种数学文化和语言。

人在旅途中，总会有令人惊奇的发现，我在数学王国的旅行也不例外。如前文所说，我发现了一个惊天秘密：朗兰兹纲领竟然与量子

物理学之间存在难以分割的联系，而且，连接它们的纽带是对偶性，这是物理学与数学中都存在的一个属性。

也许，在物理学中寻找对偶性会让人觉得奇怪，但是从一定意义上来说，物理学中的对偶性实际上是我们大家都习以为常的一个概念。我们以电和磁为例，尽管这两个概念似乎相距甚远，但是我们可以通过一个数学理论，即电磁理论，来描述它们。在该理论中，我们可以用隐藏的对偶性来实现电力与磁力的相互转化。（我们在下文将详细讨论这个过程。）20世纪70年代，物理学家们试图将这种对偶性推广至“非可换规范场论”（non-abelian gauge theory）。该理论描述的是原子核的作用力，包括将夸克束缚在质子、中子和其他基本粒子中的“强”作用力，以及导致放射性衰变的“弱”作用力。

所有规范场论的核心内容都是一种李群，叫作规范群。电磁理论从某种意义上说是最简单的规范场论，其规范群是我们已经非常熟悉的循环群（即圆形物体的旋转操作群）。该群是一个可换群，也就是说，在任意两个元素的乘法运算中，调换这两个元素的先后次序对乘积没有影响：a×b=b×a。但是，对于强弱相互作用的电磁理论而言，其对应的规范群是非可换群，即在该规范群中，$a\times b\neq b\times a$。因此，我们称其为非可换规范场论。

20世纪70年代，物理学家发现非可换规范场论中存在与电磁对偶性类似的特点，不过，其对偶性发生了奇怪的扭曲。研究发现，如果我们有规范群为G的规范场论，那么在其对偶规范场论中，规范群又是另外一个群，即朗兰兹对偶群L_G，L_G是朗兰兹纲领中的一个重要概念。

我们可以把数学和物理看成两个不同的星球，比如地球和火星。我们发现地球上的大陆之间存在某种关系，通过这种关系，欧洲的每个人都和北美洲的某一个人建立了联系：他们的身高、体重和年龄都

相同，但是，他们的性别正好相反（就像李群与其朗兰兹对偶群之间的关系发生了扭曲一样）。然后，某一天，我们遇到了一位从火星来的人。他告诉我们，他们发现在火星的不同大陆之间也存在这种关系，某个大陆上的每个人都能与另一个大陆上的某一个人建立起联系：他们的身高、体重和年龄相同，但是他们的性别正好相反。（有没有人知道火星人是不是也跟我们一样，只有两种性别？）我们听到这番话之后，一下子就惊呆了。看来地球人之间的这种关系与火星人之间的这种关系，两者之间竟然存在某种联系。为什么会这样呢?

同样的道理，朗兰兹对偶群同时出现在数学与物理学中，人们自然会认为，数学领域中的朗兰兹纲领肯定与物理学领域中的电磁对偶性之间存在某种联系。但是，近30年过去了，仍然没有人对此有所发现。

几年来，我不止一次与爱德华·威滕（Edward Witten）探讨过这个问题。威滕是普林斯顿高等研究院的教授，他是公认的当代最杰出的理论物理学家。他尤为擅长将量子物理的复杂工具应用到理论数学的研究之中，做出令人称奇的发现，提出一些人们意想不到的猜想。他的研究鼓舞了好几代数学人，并成为获得菲尔兹奖的第一位物理学家，菲尔兹奖是数学界分量最重的一个奖项。



爱德华·威滕（Edward Witten），当代著名犹太裔美国物理学家、数学家

威滕希望能找到量子对偶性与朗兰兹纲领之间可能存在的某种联系，为此他经常与我讨论这个问题。他来哈佛大学或者麻省理工学院时，常会到我在哈佛大学的办公室，我去普林斯顿大学时也常会去他的办公室。讨论激励着我们不断努力，却一直没有取得任何进展。很明显，我们的研究在某些重要环节还有欠缺，有待取得新的发现。

终于，一件意想不到的事给了我们灵感。

* * *

2003年，我在罗马参加一个会议期间，收到了我的老朋友、同事卡雷·维洛宁（Kari Vilonen）发来的一封电子邮件。卡雷是芬兰人，也是一位交游甚广的数学家。我刚到哈佛大学时，他和他的未婚妻玛蒂

娜带我去波士顿的一家体育酒吧，观看红袜队的一场棒球季后赛。可惜的是，红袜队输了，但那确实是一场值得回味的比赛。从此以后，我们成了好朋友，合作完成了几篇关于朗兰兹纲领的论文（合著者还有数学家丹尼斯·盖茨哥利），还有一个关于朗兰兹关系的重要个例的证明。

卡雷（当时在西北大学任教）在邮件中告诉我，DARPA（美国国防部高级研究计划局，the Defense Advanced Research Projects Agency）的人找到了他，希望为朗兰兹纲领的研究提供资金支持。

DARPA是美国国防部下属的一个研究部门。1957年，苏联发射了第一颗人造地球卫星，随后美国国防部便成立了该部门，其任务是推动美国取得科技进步。

我登录DARPA网站，读到了下面这段文字：

> 为了完成自己的使命，我们将在不同领域发掘各种人才，鼓励他们采用各门学科的研究方法，通过基础研究实现科学知识方面的突破。同时，通过应用研究研发各种创新型技术，解决当下的实际问题。DARPA的科学研究工作将涵盖各个方面，包括实验室工作和所有知识的验证工作……DARPA作为美国国防部创新工作的主引擎，承担的项目应具备历时短、创新效果持久的特点。

多年来，DARPA资助了大量与应用数学和计算机科学相关的研究项目，例如，该机构负责设计了ARPANET网络（因特网的前身）。不过，据我所知，该机构以前从未资助过理论数学研究项目，那么这一次他们为什么要支持朗兰兹纲领的研究呢？

朗兰兹纲领研究似乎属于抽象的纯理论研究，不会产生任何形式的直接应用价值。但是，我们必须清楚，基础性科学研究是所有技术进步的基础。数学与物理领域中的一些看似十分抽象、深奥的发现，

常常会带来各种创新，并在日常生活中得到应用。我们以当模为质数时的运算为例。乍一看，这种研究似乎十分抽象，几乎不可能应用于实际生活。英国数学家哈代（G. H. Hardy）提出过一个著名的论断，“很多高等数学的研究工作毫无价值”。但是，现实在他身上开了个玩笑。数论（哈代所从事的研究领域）中有很多看似深奥的研究成果，现在却得到了广泛的实际应用，如网上银行业务。只要我们在网上购物，就会用到模*N*算法。因此，我们绝不可以带有偏见地认为，数学上的一个公式或一个想法不大可能应用到实际生活当中。

在历史上，所有伟大的技术突破之所以会发生，通常是因为在这之前——通常是几十年前——理论研究就取得了突破。因此，如果我们缺乏对基础性科学研究的支持，技术就会裹足不前，我们的潜能也会受到限制。

基础性科学研究还有另一层重要意义。我们的社会在很大程度上受到科学研究与创新的影响，因此，基础性科学研究是我们社会文化的重要组成部分，也是人们幸福安康的重要保证。1969年，在费米国家实验室发明了当时最大型的粒子加速器后，时任实验室主任的罗伯特·威尔逊（Robert Wilson）在向美国国会原子能联合委员会（Congressional Joint Committee on Atomic Energy）汇报时，有人问及这台耗资几百万美元的机器能否在国家安全方面发挥积极作用，威尔逊回答道：

> 我们必须从长远的角度和技术发展的角度看待这个问题。否则，这个问题就如同问我们是不是优秀的画家、杰出的雕刻家或伟大的诗人一样。这些职业在我们国家都受到尊敬，这些人都有拳拳爱国之心。与之相似，这些新知识也与荣誉和国家有关，但它不会对加强国防建设起到直接作用，而会使我们这个国家更加富强，让我们在国防上的投入更有意义。

2001~2009年负责领导DARPA的安东尼·泰瑟（Anthony Tether）认为，基础性科学研究非常重要，他要求该机构的项目主管们在理论数学领域甄选出一个好的项目并予以资助。项目主管道格·科克伦（Doug Cochran）积极地响应了泰瑟的号召，他找到NSF（美国国家科学基金会）的一位朋友本·曼恩（Ben Mann）。曼恩是拓扑学方面的专家，但他那时已经不再从事学术研究了，而是来到华盛顿担任NSF数学科学部的项目主任。

当道格请他推荐一个理论数学领域中值得资助的项目时，曼恩想到了朗兰兹纲领。尽管这不是他的研究方向，但他从NSF收到的朗兰兹纲领研究资助提案中看出该领域具有重要的研究价值。这些项目本身，以及它们所涉及的理论对多个数学分支领域的影响力，给他留下了深刻印象。

因此，曼恩建议DARPA为朗兰兹纲领的研究提供资助。于是，道格就联系了卡雷、另外两名数学家和我，请我们提交一份方案，再由道格呈送给DARPA的主任。如果主任批准了该方案，我们预计将会收到几百万美元的资金支持，投入朗弗兰兹纲领研究。

坦率地说，我们一开始的时候还有些犹豫。这毕竟是一片少有人触及的未知领域，据我们了解，还没有哪位数学家接受过数目如此庞大的资助。通常，数学家们会接受NSF的小额个人资助，如小额的差旅费、研究生科研资助以及一些暑期资助。如果我们接受NSF的这项资助计划，我们就必须联合几十位数学家，使其在一个广博的研究领域中合作开展研究。由于资助金额十分巨大，我们将受到公众的严格监督，可能还会遭到同事的怀疑与妒忌。如果研究项目无法取得明显的进展，我们就会遭到嘲笑，而且DARPA有可能因为这次失败，从此拒绝资助理论数学研究项目，随后导致其他有价值的项目得不到资助。

尽管我们内心忐忑不安，但我们还是希望能对朗兰兹纲领的研究产生一些影响。单是一想到人们一向对数学研究的资助计划表现得极其小心谨慎，现在却愿意投入大笔资金，为一个前景看好的研究领域提供资助，我们就觉得这项计划有巨大的吸引力，情不自禁地感到非常兴奋。因此，我们根本没有办法拒绝这个诱惑。

接下来需要解决的问题，就是确定研究项目的主要内容。我们已经知道，朗兰兹纲领涉及多个方面的内容，与数学的多个分支领域有关。这样一个宽泛的研究主题，就算写出好几个研究方案也不是一件难事。因此，我们必须认真选择。经过一番斟酌，我们决定重点研究朗兰兹纲领最神秘的方面，即朗兰兹纲领与量子物理对偶性之间是否有可能存在某种联系。

一周后，道格把我们的方案提交给DARPA的主任。DARPA的主任同意为这个为期三年的研究项目提供数百万美元的资金支持，据我们所知，这是迄今为止理论数学研究获得的最高额度的资助。很显然，大家对我们的期待非常高，我们在兴奋不已的同时，也感到了些许压力。

值得庆幸的是，本·曼恩从NSF调到DARPA担任项目主管，并负责我们的这个项目。在与曼恩有所接触后，我发现他非常适合这份工作。他富有远见，敢于承担高风险、高回报的项目，而且知人善任。他的工作热情很高，对同事有很强的感染力。由曼恩来担任这个项目的主管，我们的运气实在是太好了。的确，如果没有他的指导与支持，我们肯定无法取得现在这些成果。

* * *

在申请资助的事尘埃落定后，我立即给爱德华·威滕发了一封电子邮件。在邮件中，我向他介绍了这个项目的情况，并问他是否有兴趣参与。威滕在物理学界与数学界都享有崇高的地位，我们必须邀请他

加入进来。遗憾的是，威滕的第一反应是不参与。他首先向我们表示祝贺，然后告诉我们他的手头还有很多其他项目，因此无法加入我们的研究项目。

不过，幸运女神再次眷顾了我们：物理学家彼得·戈达德（Peter Goddard）马上要到普林斯顿大学高等研究院担任主任。戈达德发现了非可换规范场论中的电磁对偶性，他当时正在研究与卡茨–穆迪代数表示理论相关的一些内容。因为研究领域相近，我在许多学术会议上都碰到了戈达德。

我给彼得发了一封电子邮件，向他介绍了这个项目。我请他在普林斯顿大学高等研究院组织一次会议，召集数学家与物理学家一起讨论朗兰兹纲领与物理学的对偶性，以寻找这两个领域的共同点。

戈尔德对此的反应非常积极，他全力支持我的想法。

普林斯顿大学高等研究院是举办这种会议的理想场所。该研究院成立于1930年，是一个独立的研究中心，涌现出了包括爱因斯坦（他人生中的最后20年就是在这个研究院度过的）、安德烈·韦伊、约翰·冯·诺尔曼（John Von Neumann）、库尔特·哥德尔（Kurt Gödel）等人在内的一大批卓越的科学家。其现有的科研队伍也同样强大，有罗伯特·朗兰兹和爱德华·威滕，还有两名物理学家内森·塞伯格（Nathan Seiberg）和胡安·马尔达西那（Juan Maldacena）（他们的研究领域与量子物理密切相关），以及几名数学家，如皮埃尔·德利涅和罗伯特·麦克弗森（Robert MacPherson）（他们的研究内容与朗兰兹纲领有关）等。

我和戈尔德通过电子邮件沟通，制订了在2003年12月初召开探究性会议的计划。我、本·曼恩和卡雷·维洛宁将奔赴普林斯顿大学参加这次会议，戈尔德也答应出席。我们还邀请了威滕、塞伯格和麦克弗森。普林斯顿大学的一位数学家，与我和卡雷共同负责该项目管理工

作的马克·戈瑞斯基（Mark Goresky），也将出席这次会议。此外，我们还邀请了朗兰兹、马尔达西那和德利涅，但因为他们身在外地，无法参加。

这次会议计划于那天上午11点在该研究院自助餐厅隔壁的会议室举行。我、曼恩和卡雷提前15分钟到达会场，当时会场里空无一人。我一边焦急地踱步，一边想："威滕会来吗？"在所有被邀请的人中，只有他没有确定是否会出席。

在会议只差5分钟就要开始的时候，门开了，威滕走了进来！这一刻我便知道这次会议肯定会取得不错的结果。

几分钟后，其他人也都到了。我们围着一张大桌子坐了下来，一番寒暄之后，大家安静下来。

"感谢各位出席这次会议，"我说道，"我们已经知道，朗兰兹纲领与电磁对偶性之间存在某些共同点。但是，尽管我们付出了许多努力，但我们仍然无法真正了解其中的奥秘。我认为，现在已经到了揭晓谜底的时候了，因为DARPA慷慨解囊，为这项研究提供了充足的资金支持。"

在座的人纷纷点头。彼得·戈尔德问道："我们该怎么做呢？你有什么提议吗？"

这次会议之前，我和卡雷、曼恩已经设想过大家可能会问到的各种问题，因此我胸有成竹地答道：

"我建议在这里举行一次会议，邀请相关领域的物理学家参与，同时组织数学家做报告，介绍朗兰兹纲领的研究现状。然后，我们再讨论朗兰兹纲领与量子物理之间可能存在哪些联系。"

我说完这句话之后，大家的眼睛都看向威滕。他是量子物理领域的泰斗级人物，所以他的意见至关重要。

威滕身材高大，仪表堂堂。他的学术能力很强，有些人甚至有点儿畏惧他。他说话时字斟句酌，逻辑十分严谨，并且经常会停下来，默默地思考。在思考时他会闭上眼睛，低下头。此时，他正在低头思考。

我们耐心地等着，等待的时间虽然不到一分钟，我却觉得十分漫长。终于，威滕开口了："这个建议好像还不错。那么，你建议我们什么时候开这个会呢？"

我和曼恩、卡雷情不自禁地交换了一下眼神。有威滕参加，这就是我们取得的巨大成功之一。

经过简短的讨论，我们确定了会议召开的时间：2004年3月8日至10日。接着，有人又问到嘉宾与发言人的人选问题。我们说了几个名字，大家一致同意通过电子邮件确定最后名单，再发邀请函。至此，会议结束，整个过程不超过15分钟。

不言而喻，我和曼恩、卡雷都非常高兴。威滕答应组织这次会议（这当然有助于提升会议的号召力），并承诺将积极参与。据我们分析，朗兰兹本人以及研究院里对这个课题感兴趣的其他物理学家与数学家也可能会参与其中。我们成功地实现了第一个目标。

在随后的几天里，我们确定了参会者的最终名单。一周后，我们发出了邀请函，它的内容是这样的：

> 我们诚挚地邀请您出席一个有关朗兰兹纲领与物理学的非正式研讨会。该研讨会将于2004年3月8日至10日在普林斯顿大学高等研究院举行，目的是向各位物理学家介绍几何朗兰兹纲领研究在近期

取得的进展，并探讨该研究与量子场论之间可能存在的联系。我们将会安排几位数学家做导论性报告，并安排大量时间展开非正式讨论。本次研讨会获得了DARPA的资金支持。

这样的会议通常会有50至100人参加，流程为发言人做报告，其他人认真地听报告，报告结束后会有几个人提问，会后还会有人与发言人做进一步接触。但是，我们在设计本次会议时却另辟蹊径，我们不想沿用惯常模式，而是期望能举办一次效率更高的自由讨论式会议。因此，我们决定缩小会议的规模，把参会人数限制在20人左右。我们认为这样的安排有助于参会者之间的积极交流，使他们在交谈时不受拘束。

2003年11月，我们在芝加哥大学举行的一次会议采用的就是这种模式。应邀参加的数学家不多，包括德林费尔德和贝林森（他们两位几年前被芝加哥大学聘为教授）。那次会议非常成功，从而证明了这种会议模式是切实可行的。

我们还确定了发言人选，有卡雷、马克·戈瑞斯基、我，以及我带过的博士生戴维·本–兹维（David Ben-Zvi，当时在得克萨斯大学任教）。我们把材料分为4个部分，每人主讲其中的一个部分。我们在做报告时，需要向参会的物理学家们介绍朗兰兹纲领的主要内容。由于他们对这个领域并不熟悉，因此这项任务的难度并不小。

* * *

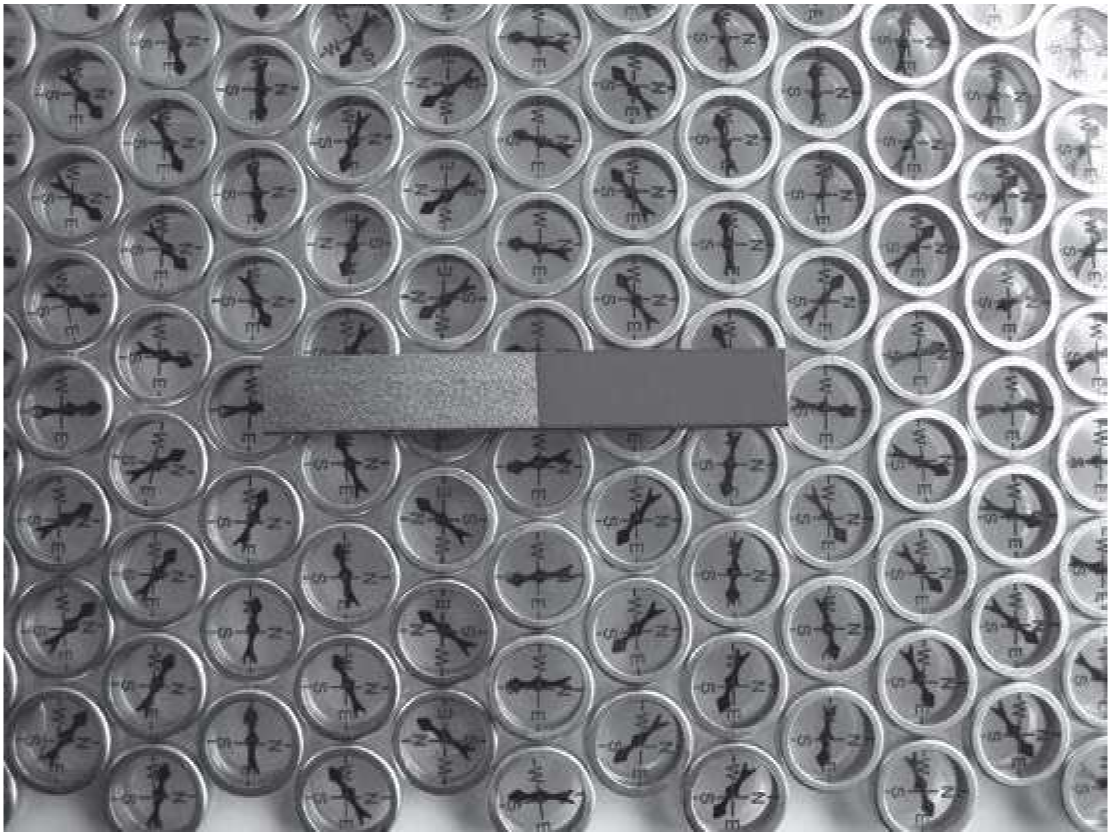
在准备会议的过程中，我希望能进一步了解电磁对偶性。我们对电力与磁力都比较熟悉，由于电力的作用，带有相同或相反电荷的带电物体会相互排斥或吸引。例如，电子带有负电荷，质子带有正电荷（电量为正值），正是由于两者之间存在吸引力，电子才会围绕原子

核旋转。电力会生成电场，我们都见过闪电出现时的电场作用，闪电就是潮湿的热气团在电场中运动引起的。



照片来源：雪恩·李尔（Shane Lear），NOAA照片图书馆

形成磁力作用的原因与电场作用有所不同。磁力是磁体或者运动的带电粒子产生的作用力。磁体有北极和南极两个磁极，我们把两个磁体放到一起，如果相反的磁极并排，它们就会相互吸引，反之则会相互排斥。地球是一个巨大的磁体，我们在使用指南针时就是利用了地球的磁力作用。磁体会产生磁场，下图清楚地显示了磁场的特点。



照片来源：德纳·梅森（Dayna Mason）

19世纪70年代，英国物理学家詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）借助数学理论完美地展现了电磁场的特点，他用来描述电磁场的那组微分方程被冠以他的名字。令人意想不到的是，这些方程式其实非常简单：一共只有4个方程式，而且形式上特别对称。研究发现，如果我们在真空（即没有任何物质存在）环境下考虑该理论，将电场与磁场互换，这组方程将不会发生改变。换言之，电场与磁场的互换是麦克斯韦方程式的一个对称操作，叫作电磁对偶性。也就是说，电场与磁场之间的关系具有对称性，两者的相互作用完全相同。

麦克斯韦方程式描述的是经典的电磁学理论，即在距离较大、能量较弱时该理论成立。但是，如果距离很小、能量很强，描述电场与磁场的特点时就需要使用量子电磁理论。在量子理论中，电场与磁场

的携带者为基本粒子——光子，光子会与其他粒子发生相互作用。这套理论叫作量子场论。

为了避免混淆，我需要强调一个问题。术语“量子场论”有两个不同的含义：第一，它指的是用于描述基本粒子运动特点及其相互作用的一般性数学语言；第二，它是指表现基本粒子运动特点的具体模型，例如，量子电磁理论就是这种定义下的量子场论。我在使用该术语时大多使用的是它的第二个定义。

在这种理论（或模型）中，有些粒子（如电子和夸克）是构成物质的基本单位，而有些粒子（如光子）则是力的作用方式。每种粒子都有不同的特点，有的是我们熟悉的特点，如有质量和带电荷，而有的特点我们并不熟悉，如“旋转”。量子场论就是把这些特点组合到一起的配方。

事实上，“配方”（recipe）这个词可以产生具有启示作用的类比。若把量子场论类比成烹饪方法，那么，我们在烹饪时使用的各种食材就代表各种粒子，把各种食材混合到一起的做法就像粒子间的相互作用。

我们以俄式罗宋汤的做法为例。在我的家乡，人们一年四季都爱喝这种汤，我母亲就是做罗宋汤的高手。（这是不容置疑的！）罗宋汤的图片如下（照片由我父亲拍摄）：



当然，我母亲做罗宋汤的方法，我是不会告诉你们的。不过，我在网上找到了另外一种配方：

清汤（牛肉或蔬菜汤）8杯

带骨牛腿肉1磅

大洋葱1只

去皮大甜菜根4个

去皮胡萝卜4个

去皮黄褐色大土豆1个

卷心菜丝2杯

新鲜莳萝碎3/4杯

红酒醋3茶匙

酸奶油1杯

盐胡椒粉

如果我们把这些食材类比成量子场论中的粒子，那么，在这种假设下，对偶性又是什么呢？当然是指在总量保持不变的前提下我们可以替换某些食材（“粒子”）。

这种对偶性表现为下列食材之间可相互替换：

甜菜根→胡萝卜

胡萝卜→甜菜根

洋葱→土豆

土豆→洋葱

盐→胡椒粉

胡椒粉→盐

而且，其他食材在这种对偶性的作用下也保持不变，包括：

清汤→清汤

牛腿→牛腿

……

由于可替换食材的数量彼此相等，因此整个配方并没有发生变化。这就是对偶性。

不过，如果我们让甜菜根和土豆相互替换，配方就会发生变化：在新配方中将会有4个土豆和1个甜菜根。我没有喝过这种配方的罗宋

汤，但我相信这样的罗宋汤不会是一道美味。

从这个例子中我们可以看出，烹饪配方中的对称性并不多见，但是从对偶性这个角度我们也能对这道菜有所了解。我们在做罗宋汤时，甜菜根与胡萝卜可以互换，而做出来的汤不受影响，这说明罗宋汤中的甜菜根与胡萝卜的量之间达到了某种平衡。

我们继续讨论量子电磁理论。我们说该理论具有对偶性，意思是，如果我们替换其中的粒子，不会导致整体的性质发生变化。在电磁对偶性的作用下，我们可以把所有的“带电体”变成“带磁体”，或者把所有的“带磁体”变成“带电体”。例如，电子（就像罗宋汤中的甜菜根）携带电荷，因此可以将其替换成携带磁荷的粒子（就像罗宋汤中的胡萝卜）。

这种粒子与我们日常生活的经验相矛盾：磁体总是有两极，而且不可分割！如果把一个磁体分成两个部分，每个部分仍然有两个磁极。

但是，物理学家推测携带磁荷的基本粒子是存在的，这种粒子叫作磁单极子。第一个提出这种猜想的物理学家，是量子物理学的奠基人之一保罗·迪拉克（Paul Dirac）。1931年，保罗指出，如果我们在磁单极子所在的位置（数学家称之为磁场的“奇点”）对磁场进行某个有趣的操作，该磁单极子将携带磁荷。

遗憾的是，人们在实验中并没有发现磁单极子，因此我们无法确定自然界中是否真的存在磁单极子。如果不存在，那么就量子层面而言，自然界中并不存在严格的电磁对偶性。

自然界是否存在磁单极子的问题至今悬而未决。不过，我们可以尝试构建一个量子场论，使之与自然界的状态非常接近，并存在电磁对偶性。我们继续以烹饪做类比，在“烹饪”时，我们可以尝试具有对

偶性的新理论，比如，我们可以增减已知配方中的“食材”，改变食材的品种及用量等。这种“实验性食谱”可能会产生不同的结果，我们也不一定会“食用”这些根据想象做出来的菜肴。但是，无论其味道如何，通过梦想厨房研究这些新菜式，我们总能有所收获——这些实验有助于我们找到烹制美味菜肴（即描述宇宙特点的模型）的方法。

几十年来，量子物理学正是采用这种“模型构建”的实验，取得了一个又一个进展（这与烹饪技术的发展颇为相似）。在构建这些模型时，我们采用的一个有效指导原则就是对称性。模型的对称性越明显，越易于分析。

在这里，我们要注意一个重要事实。自然界中存在两种基本粒子，即费米子和波色子，前者是构成物质的基本粒子（电子、夸克等），后者是携带各种作用力的粒子（光子等），人们利用日内瓦大型强子对撞机发现的神秘的希格斯介子就是一种波色子。

这两种粒子从本质上讲存在区别：两个费米子不能同时处于相同的状态，但任意数目的波色子却可以同时处于相同的状态。由于这两种粒子的特性具有天壤之别，因此在很长一段时间里，物理学家都认为量子场论的任何对称性都必须保持费米子区与波色子区各自的独立性——这两种粒子具有天然的相互排斥性。但是，20世纪70年代，有几名物理学家提出了一个看上去非常疯狂的观点：有可能存在某种对称性，使波色子与费米子可以互换。他们把这种对称性称作“超对称性”。

量子力学的创始人之一尼尔斯·波尔（Niels Bohr）对乌夫冈·保利（Wolfgang Pauli）说过一段非常有名的话：“我们都觉得你的这个理论非常疯狂，唯一的不同在于，对这个疯狂理论是否正确的看法不一致。”

尽管我们不知道超对称性在自然界中是否存在，但这个观点却广受欢迎。原因在于，在引入超对称性之后，传统量子场论所面临的很多无法解决的问题迎刃而解。超对称性理论的结构更加别致，亦便于分析。

量子电磁理论不具有超对称性，但却拥有超对称性扩展结构。我们在量子电磁理论中添加包含波色子与费米子在内的各种粒子，由此得到的量子电磁理论就具有超对称性。

而且，物理学家在对具有最强超对称性的电磁理论扩展结构进行研究后发现，其中真的存在电磁对偶性。

我们将上述内容做一个小结：我们不知道某种形式的量子电磁对偶性是否存在于真实世界中，但是我们知道，在量子电磁理论的理想化、具有超对称性的扩展结构中，电磁对偶性是明显存在的。

关于这种对偶性，还有一个重要方面我们尚未论及。电磁量子场论有一个参数——电子携带的电荷，该值为负，因此我们把它记作$-e$，其中$e=1.602\times10^{-19}$库仑，非常小。具有最强超对称性的电磁理论扩展结构也有一个类似的参数，我们把它记作e。如果我们根据电磁对偶性，将所有带电体替换成带磁体，那么电磁理论中电子的电荷数就不是e，而是e的倒数$1/e$了。

如果e非常小，$1/e$就会非常大。因此，如果电磁理论中的电子携带少量电荷（如我们生活的这个世界），那么其对偶电磁理论中的电子就会携带大量电荷。

这个结果非常令人吃惊！我们还是用罗宋汤来做类比。假设e是罗宋汤的温度，那么根据这种对偶性，只要我们把汤配方中的甜菜根与胡萝卜互换，一盆冰冷的罗宋汤立刻便会变得热气腾腾。

事实上，由e变为其倒数$1/e$，这是电磁对偶性的一个重要内容，具有非常深远的意义。在构建量子场论时，只有该参数取像e这样的极小值，我们才能做到得心应手。我们无法推测在该参数取较大值时，量子电磁理论是否仍然有意义。但是电磁对偶性表明，当该参数取较大值时，该量子电磁理论不仅有意义，而且与它取较小值时没有什么不同。这意味着，无论该参数取什么样的值，我们都可以描述量子电磁理论。因此，人们把电磁对偶性看作量子物理学的“圣杯”。

* * *

我们接下来需要考虑的问题是，除了电磁理论及其超对称性扩展结构以外，其他量子场论中是否存在电磁对偶性。

除了电力和磁力以外，自然界中还存在另外三种已知的作用力：万有引力（这是一种我们都非常熟悉，也应该感谢的作用力）和两种核力（名称比较通俗，分别为强核力和弱核力）。强核力将夸克束缚在质子、中子等基本粒子之中，弱核力则会导致原子和基本粒子变形，如原子的β衰变（电子或中子发射）和氢的聚变（恒星的能量来源）。

这些作用力似乎各不相同，但研究发现，阐述电磁力、弱核力和强核力等的相关理论都属于规范场论。1954年，物理学家杨振宁与罗伯特·米尔斯（Robert Mills）在其合作完成的论文中开创性地提出了规范场论，因此该理论又叫作杨–米尔斯规范场论。我在本章开头告诉过大家，规范场论有一个对称群，即规范群，它是一个李群。电磁理论的规范群是循环群，它也叫作SO(2)或U(1)群。这是最简单的李群，它还是可换群。我们知道，很多李群都是非可换群，如球体旋转群SO(3)。杨振宁与米尔斯的想法是利用非可换群替换循环群，以推广电磁理论。研究发现，包含非可换规范群的规范场论，可以准确地描述弱核力与强核力。

弱核力规范场论的规范群叫作SU(2)群，是SO(3)群的朗兰兹对偶群，比SO(3)群大一倍。强核力规范场论的规范群叫作SU(3)群。

因此，自然界一共有4种基本的作用力（我们把电力和磁力看作电磁力的组成部分），规范场论给出了其中三种作用力的通用描述形式。此外，人们发现，这三个规范场论并非彼此独立，而是以三个组成部分构成了一个整体——“标准模型”（Standard Model）。在标准模型中，上述作用力是三个彼此独立的部分，因此标准模型是一种“统一理论”，这是爱因斯坦在其人生的最后30年苦苦求索却未能实现的目标（尽管当时的人只知道电磁力和万有引力这两种作用力）。

我们在这里长篇累牍地强调数学中统一理论的重要意义。例如，朗兰兹纲领利用类似的术语描述数学不同分支领域的多种现象，因此它是一种统一理论。在物理学领域，利用最初形成的少量原理构建统一理论也极具吸引力，因为我们希望尽可能全面地了解宇宙运行的规律，也希望终极理论（如果真的存在）简单明了、形式别致。

但是，简单明了、形式别致未必意味着易于理解。例如，麦克斯韦方程式深奥难懂，需要花费很多时间和精力才能理解其含义。但是，这些方程式的结构非常简单，以最经济的方式揭开了电磁力的神秘面纱。而且，这些方程式的表现形式也非常别致优雅。爱因斯坦的万有引力方程与杨振宁、米尔斯提出的非可换规范场论方程也具有同样的特点。统一理论应该兼收并蓄，包含所有这些内容，就像交响乐把所有乐器的演奏交融到一起，生成优美的乐曲一样。

标准模型使人们朝着这个方向迈出了坚实的一步，其实证工作（包括不久前发现的希格斯波色子）也取得了成功。不过，标准模型仍然不是宇宙的终极理论，原因之一在于它没有把万有引力包含其中。研究表明，万有引力是最难捉摸的作用力。爱因斯坦的广义相对论可以帮助我们较好地理解物体间距离较大时的万有引力作用，但是我们还没有找到经过实验验证的量子理论，可用于描述物体间距离较

短时的万有引力作用。而且，即便我们把注意力集中在自然界的其他三种作用力上，仍然有很多问题无法借助标准模型予以解答。此外，标准模型无法解释天文学家观测到的大块物质（被称作“暗物质”），因此，标准模型充其量是终极统一理论的草稿。

我们可以确定的一点是：书写终极统一理论核心内容所使用的必定是数学语言。事实上，在杨振宁与米尔斯提出了非可换规范场论之后，物理学家们惊奇地发现，早在几十年前，数学家在没有参考任何物理知识的情况下，就已经提出了构建这些理论所必需的数学表现形式了。杨振宁在获得诺贝尔奖之前，用下面这番话表达了他的敬畏之心：

> 这不仅是令人欢欣鼓舞的成功，其背后还蕴藏着更多、更深层次的意义。我们发现，物理世界的架构竟然与深奥的数学概念有着如此密切的联系，而数学界在探讨这些概念时考虑的主要内容竟然只是其逻辑与外在形式之美。还有什么事会比这更神秘莫测、令人敬畏的呢?

有人曾问爱因斯坦：“数学是人类凭空想象出来的事物，为什么它在描述客观现实时却是那么精准呢？”爱因斯坦在回答时也表现出了同样的敬畏之心。杨振宁与米尔斯利用规范场论描述自然界的作用力，而在数学家研究的几何范例中，规范场论同样符合几何学的内在逻辑规律，因此，这些概念在数学领域出现的时间更早一些。这个事实充分地证明了另外一位诺贝尔奖获得者、物理学家尤金·魏格纳（Eugene Wigner）的论断：“在自然科学领域，数学发挥了非比寻常的重要作用。”尽管几百年来，科学家们一直致力于探索这种“作用”究竟是如何发生的，但依然没有答案。数学概念似乎就是一种客观存在，无须借助物理学，也超越了人脑的限制。毫无疑问，数学概念与客观现实及人类意识之间，必然存在某种极为深奥的联系，有待人们进一步探索。（关于这方面的内容，我们将在第18章进行深入讨论。）

为了超越标准模型，我们需要不断发掘新观点和新概念，超对称性就是这样一个概念。关于超对称性是否存在的问题，人们众说纷纭、尚无定论。到目前为止，人们也没有发现它的任何踪迹。实验是理论的终极裁判，在通过实验验证之前，超对称性还只是一种理论猜想，即便这种理论精妙绝伦。不过，即使研究发现超对称性在现实世界中并不存在，它也不失为一种方便有效的数学工具，可以帮助我们构建量子物理学研究的新模型。这些新模型与表现现实世界的物理性质的各种模型之间并不存在天壤之别，而且由于其对称性更强，因此使用起来更为方便。总之，无论超对称性是否存在，我们都可以借助它去研究我们所处的现实世界。

非可换规范场论与电磁理论一样，也有一个最大的超对称性扩展结构。我们在这些非可换规范场论中加入各种粒子，包括波色子和费米子，当其内部达到最大程度的平衡时，就产生了超对称性。于是，我们自然会产生这样的疑问：这些非可换规范场论理论与电磁对偶性之间存在类似的联系吗?

20世纪70年代，物理学家克劳斯·蒙托宁（Claus Montonen）与戴维·奥利弗（David Olive）回答了这个问题。他们两人基于彼得·戈达德（后来担任普林斯顿高等研究院的院长）、基恩·努特斯（Jean Nuyts）和戴维·奥利弗的研究成果，得出了一个令人吃惊的结论：超对称性非可换规范场论中的确存在电磁对偶性，不过这些规范场论不是自对偶，它在这一点上与电磁理论不同。我们在前面讨论过，如果我们把电磁理论中的所有带电体换成带磁体，或者把所有带磁体换成带电体，那么电磁理论保持不变，只不过电子携带的电荷量变成了初始值的倒数。但是，研究发现，如果我们对规范群为G的一般性超对称规范场论进行同样的操作，就会得到一个不同的理论——它仍然是一个规范场论，但是规范群不同（参数也会变成初始值的倒数，与电磁理论中电子电荷量的变化相同）。

那么，这个对偶性规范场论的规范群是什么呢？研究发现，该规范群为L_G，即群G的朗兰兹对偶群。

在研究中，戈达德、努特斯和奥利弗通过仔细分析规范群为G的规范场论中的电荷与磁荷，得出了上述结论。电磁理论是规范群为循环群的规范场论，其中的电荷与磁荷均为整数。如果我们互换电荷与磁荷，就是用一个整数集替换另一个整数集，因此，电磁理论保持不变。但是戈达德等人发现，在一般的规范场论中，电荷与磁荷的值是两个不同的集合，我们把它们分别记作S_e和S_m。这两个集合可以借助规范群G，用数学方法加以表示（不过，这跟我们现在讨论的内容关系不大）。

研究表明，在电磁对偶性的作用下，S_e可以变成S_m，S_m也可以变成S_e。现在，我们需要回答的问题是，是否存在另一个群G'，其中的S_e就是群G中的S_m，同时，S_m就是群G中的S_e（而且这种关系同样适用于由群G和群G'确定的其他数字）。没有明显的证据表明这样的群G'是否存在，但是戈达德等人证明了它的存在，并成功地构建出该群。当时，他们并不知道，朗兰兹在10年前就用差不多的方法构建出群G'，但朗兰兹的动机与他们完全不同。事实上，该群G'就是朗兰兹对偶群L_G。

电磁对偶性所产生的群，与数学家在完全不同的环境下发现的朗兰兹对偶群竟然完全一致，其原因何在？这是我们在普林斯顿大学会议上准备着手解决的重要问题。

第 17 章
数学之美

从普林斯顿小镇乘火车到纽约市大约只需要一个小时，该镇看上去就像美国东北部的一个普通的市郊小镇。被科学界称为“研究所”的普林斯顿高等研究院，就坐落在普林斯顿镇的郊区。研究所周围风景如画，一群鸭子在小池塘中游弋，树木倒映在平静的水面上，显得十分宁静幽远。研究所旁边的建筑，都是两三层的砖砌小楼，保留着20世纪50年代的建筑风格，但却隐隐反映出研究所强大的学术能力。那安静的走廊，还有研究所的主图书馆，都曾经有爱因斯坦等科学巨匠的身影。在这样的环境中徜徉，人们会情不自禁地去感叹研究所的悠久历史。

2004年3月，我们的会议就在这里召开。邀请函是2003年12月份发出的，尽管时间比较仓促，但是参会者的反应却十分热烈，大约有20人出席了这次会议。会议开始后，我请大家轮流做自我介绍。威滕、朗兰兹和彼得·戈达德，就坐在我旁边，这让我备感压力。此外，出席会议的还有他们三人各自所在的数学与自然科学圈子中的几名同事。分别与蒙托宁以及戈达德和努特斯合著过论文的戴维·奥利弗也到会了，自然，这次会议绝对少不了本·曼恩。

我们按照计划有条不紊地开展各项活动，会议的核心内容就是探索本书介绍的那些问题：朗兰兹纲领与数论及调和分析的渊源，以及由朗兰兹关系向有限域平面上的曲线、黎曼曲面的推广。我们还花了一些时间来解释贝林森–德林费尔德构架、我和费金合作开展的卡茨–穆迪代数研究，以及卡茨–穆迪代数与二维量子场论之间的联系。

与一般的研讨会不同，我们这次安排了大量的讨论、交流时间。会议的效率很高，参会者讨论得如火如荼，甚至连来去自助餐厅的路上也没有停止交流。

威滕从始至终都非常积极，他坐在前排认真倾听，不时提出一些问题，还不断与发言人进行深入交流。会议第三天的上午，他告诉

我：“我对我们研究的这个问题有了一个新想法，下午就由我来发言吧。”

在发言中，威滕概述了两个学科之间可能存在的某种联系。这次发言是一个新理论的雏形，目的是架设一座连接数学与物理学的桥梁，这也是他自己、他的研究合作伙伴以及无数其他人一直苦苦求索的目标。

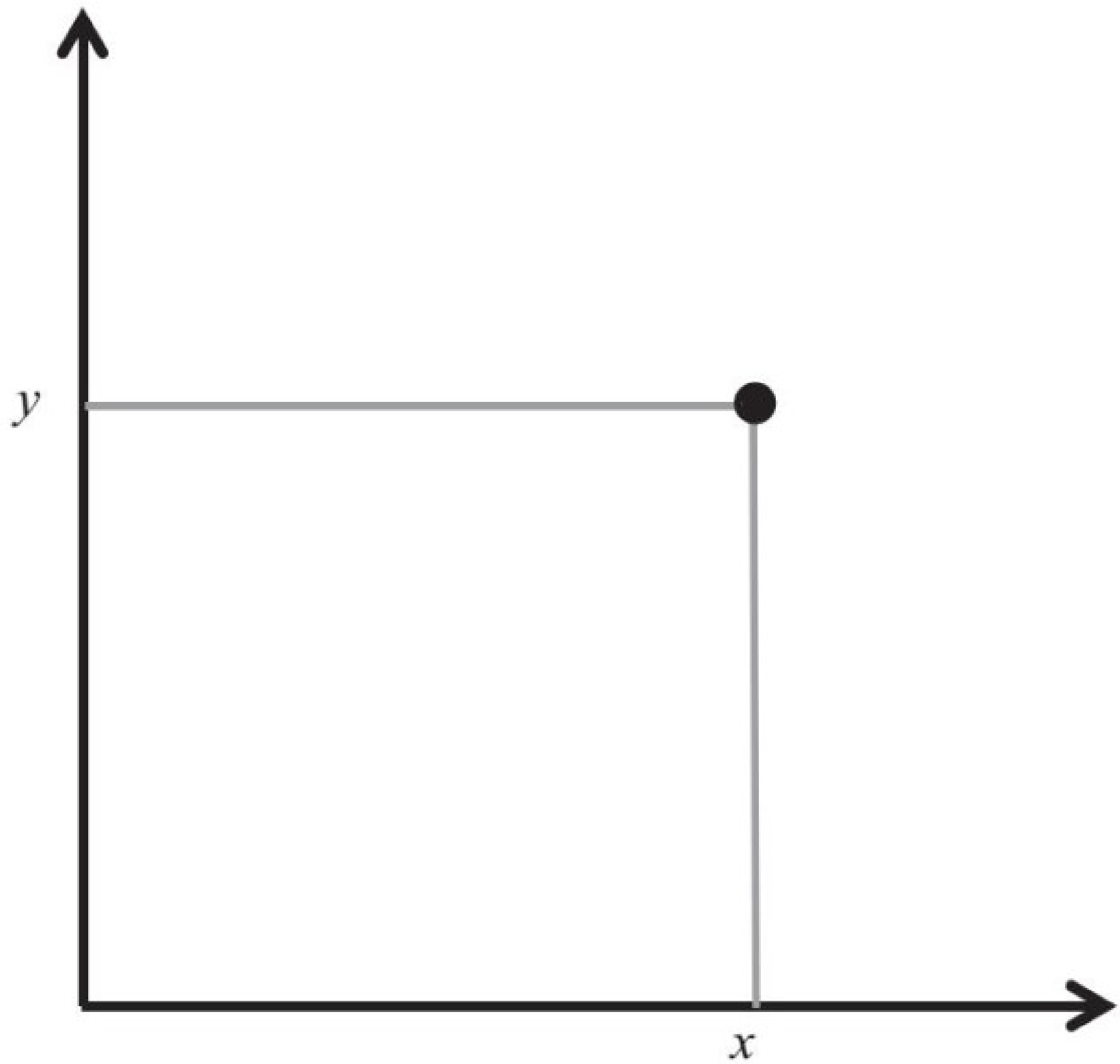
我们在前面讨论过，在安德烈·韦伊“罗塞塔石碑”的右侧轨道上，人们围绕黎曼曲面为朗兰兹纲领构建几何表现形式。所有的黎曼曲面都是二维的，例如，我们在第10章讨论的球面（最简单的黎曼曲面）有两个坐标数字：纬度和经度，因此球面是二维的。其他黎曼曲面也都是二维的，因为曲面上所有点的极小邻域都像一小块二维平面，可以用两个独立的坐标数字来描述该曲面。

与此同时，人们发现规范场论具有电磁对偶性。然而，规范场论面对的是四维空间。为了在规范场论与黎曼曲面之间建立某种联系，威滕准备用“降维”的方法，将四维规范场论变成二维规范场论。

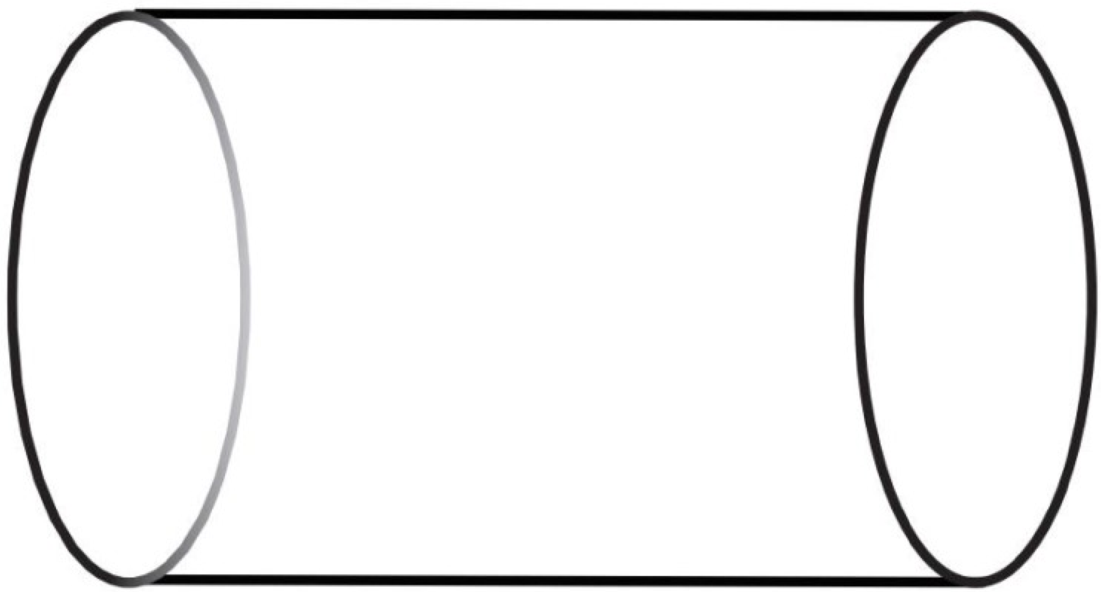
“降维”实际上是物理学领域中的标准工具：对于某个已知的物理模型，仅关注某些自由度，而不考虑其他自由度，以建立起近似的简单模型。例如，假设我们在一架处于飞行状态的飞机上，站在过道上的乘务员递给你一杯水。为简单起见，我们假设乘务员的手的运动方向与飞机的飞行方向垂直。那么，杯子的运动速度就由两个部分构成：首先是飞机的飞行速度，其次是乘务员把水递给你的时候手的运动速度。不过，前者远比后者大，因此，如果我们从地面上一个静止观察者的角度来描述杯子在空中的运动状态，那么我们完全可以忽略杯子运动速度中的第二个组成部分，认为杯子的运动速度与飞机的飞行速度完全相同。由于该速度是由两个部分构成的，因此这是一个二维问题。但是通过上述方法，我们可以把这个二维问题简化成只研究其主要构成部分的一维问题。

对于我们要研究的关系问题，为了降维，我们考虑用两个黎曼曲面的乘积生成一个几何图形（即流形）。在这里，“乘积”是指新几何图形的坐标数字由原有的两个黎曼曲面的坐标数字结合形成。

我们举个简单的例子。每条直线都有一个坐标数字，两条直线的乘积会生成两个独立的坐标数字。由此我们得到一个平面，该平面上的每个点都可以用两个坐标数字来表示，这些坐标数字都是由这两条直线的坐标数字结合而成的。



同理，一条直线与一个圆的乘积是一个柱面。柱面有两个坐标数字，一个是圆的坐标数字，另一个是直线的坐标数字。



我们在计算乘积时，维数增加。在上述两个例子中，两个原有的对象都是一维的，其乘积是二维的。再比如，一条直线与一个平面的乘积是三维的，即3=1+2。

同理，两个黎曼曲面的乘积的维数是4，即4=2+2。我们可以画出黎曼曲面（前面已经讨论过），但是我们无法画出四维流形，因此，我们只能用数学方法来研究这个四维流形。而且，由于较低维数的几何图形更容易想象，所以在研究四维流形时，我们采用了类似的方法。这个例子充分说明了数学抽象思维的强大作用，再一次验证了我们在第10章中讨论过的相关内容。

现在，我们假设在这两个黎曼曲面中，其中一个黎曼曲面（我们记作X）的尺寸远小于另一个（记作Σ）。此时，有效自由度主要集中在Σ上，因此，我们可以借助Σ上的理论[物理学家称之为“有效理论”（effective theory），在本例中是一个二维理论]，来近似描述基于这两个曲面乘积所产生的四维理论。如果在保持其形状不变的前提

下，我们把X逐渐缩小（注意，该有效理论取决于X的形状），这种近似程度就会越来越高。于是，我们就从研究X和Σ的乘积所得到的四维超对称规范场论，过渡到研究由Σ限定的一个二维理论之上。

在深入讨论该二维理论的性质之前，我们先了解量子场论的一般定义。在电磁理论中，我们研究三维空间中的电场与磁场。数学家把电场和磁场称作向量场，我们可以用风的特性来类比向量场：在三维空间的每个点上，风都有方向和强度，这个特性可以用带箭头的线段表示。带箭头的线段在数学上被称作向量，空间中所有向量的集合就是向量场。我们都见过气象图上表示风的向量场。

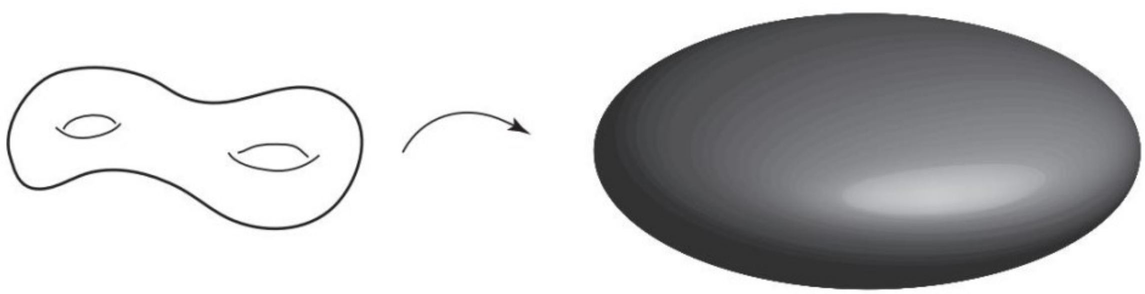
同样，给定磁场在空间中的每个点的位置也有具体的方向与强度，因此，磁场也是一个向量场。换句话说，我们可以依据某种规则，用向量为三维空间中的每个点赋值。数学家为这种规则起了一个很贴切的名字，即由三维空间到三维向量空间的“映射”（map）。如果我们跟踪给定磁场随时间变化的情况，就会得到由四维空间至三维向量空间的映射。（这好比电视上的气象图随时间变化而变化的过程。）同理，任意给定的随时间而变化的电场，也可以表示成由四维空间到三维向量空间的映射。电磁理论就是描述这两个映射的数学理论。

在经典电磁理论中，我们表示仅对与麦克斯韦方程式的根相对应的那些映射感兴趣。而在讨论量子理论时情况则不同。在量子理论中，我们研究所有映射。事实上，量子理论中的所有计算都涉及所有可能的映射之和，不过，所有的映射都经过加权，即与规定的因子相乘。在这些规定因子的作用下，与麦克斯韦方程式的根相对应的映射发挥主要作用，其他映射也会发挥一些作用。

从时空到各种向量空间的映射还出现在很多其他量子场论中（如非可换规范场论）。不过，并非所有量子场论都依赖向量。在“西格玛模型”（sigma model）这种量子场论中，我们考虑由时空至弯曲几何

图形（即流形）的映射。该流形叫作“目标流形”（target manifold），例如，球形就可以充当目标流形。尽管人们最先在四维空间中研究西格玛模型，但是，即使我们把时空看成任意维数的流形，该模型仍然有意义。因此，对于任意目标流形和任意维数流形，都存在一个西格玛模型。例如，我们选择一个二维黎曼曲面来取代时空，把李群SO(3)作为目标流形，那么其对应的西格玛模型将描述由该黎曼曲面至群SO(3)的映射。

如下图所示，左边是一个黎曼曲面，右边是目标流形，箭头代表两者之间的映射，即利用目标流形中的点为黎曼曲面上的各个点赋值的规则。



在经典西格玛模型中，我们所考虑的由时空至目标流形的映射能给出运动方程式的解（运动方程式与麦克斯韦方程式类似），这样的映射叫作“调和映射”。在量子西格玛模型中计算所有感兴趣的量（如相关函数）时，都会先为所有映射加权（即乘以规定因子），然后再求和。

* * *

接下来，我们继续讨论需要解决的问题：我们将X缩小到非常小，且对由$\Sigma \times X$得到的规范群为G的四维超对称规范场论进行降维操作，在这种情况下，哪种二维量子场论可以被用来实现这种降维操作呢？研究发现，这种量子场论是西格玛模型的超对称扩展结构；由Σ

至特定目标流形M映射而成，特定目标流形M则由黎曼曲面X与原规范场论的规范群G确定。因此，为了反映出这个特点，我们将它记作$M(X，G)$。

物理学家在好不容易建立了这些流形的概念之后，却发现数学家早已完成了这些工作，类似情况在群论研究中也出现过（详见第2章）。事实上，这些流形有一个名称——“希钦模空间”，是以英国数学家奈杰尔·希钦（Nigel Hitchin）的名字命名的。希钦是牛津大学的教授，他在20世纪80年代将这些空间的概念引入数学领域并进行研究。我们在对四维规范场论进行降维操作时需要使用这些空间的概念，因此，物理学家对这些空间感兴趣的原因是显而易见的。但是，数学家竟然也对它们感兴趣，个中原因我们似乎看不出来。

幸好，奈杰尔·希钦详细地记录了他发现这些空间的具体过程。事实上，这个例子也充分说明了数学与物理学之间存在微妙的关联。20世纪70年代末，希钦与另外两位数学家迈克尔·阿蒂亚（Michael Atiyah）及尤里·曼宁，对所谓的“瞬子方程”（instanton equation）进行了研究。瞬子方程式是物理学家在研究规范场论时，在四维平坦空间中建立的。希钦随后研究了三维平坦空间中的微分方程式，这些微分方程式被称作“单极方程式”（monopole equation），是通过将四维瞬子方程式降为三维得到的。从物理学的角度看，这些单极方程式有很大的研究价值，人们还发现，它们竟然拥有迷人的数学结构。

之后，人们又更进一步，研究将四维瞬子方程式降为二维后得到的那些微分方程式。可惜的是，物理学家发现这些方程式在二维空间（即平面）中没有“非凡根”（non-trivial solution），于是他们就放弃了这方面的研究。但是，希钦的研究却有新发现：在任意弯曲的黎曼曲面（如甜甜圈或椒盐卷饼的表面）上可以建立这些方程式。物理学家之所以与这个重要成果擦肩而过，是因为在当时（20世纪80年代初）物理学家对这种弯曲表面上的量子场论并无特别的兴趣。但是，

希钦却通过数学方法发现，在这些表面上二维方程式的根十分丰富。因此，他引入了模空间$M(X，G)$，作为这些微分方程式的根在黎曼曲面X上的驻留空间（在本例中，即规范群G的驻留空间）。他发现，黎曼曲面是一种值得关注的流形，而且它拥有“超凯勒度量”（hyper-Kähler metric）。（当时，人们找到的超凯勒度量的实例并不多。）接着，其他数学家蜂拥而上，沿着希钦确定的方向开展了大量研究。

大约10年后，物理学家开始注意到这些流形在量子物理学中的重要意义，尽管在威滕与其合作者完成我介绍的这项成果之前，物理学家们在这一方面的研究成果并没有引起很大的反响。（希钦的模空间最初出现在安德烈·韦伊“罗塞塔石碑”右侧轨道中，但在不久前，人们发现，在黎曼曲面被有限域平面上的曲线所替换的中间轨道中，模空间也有某些应用，这同样值得我们关注。）

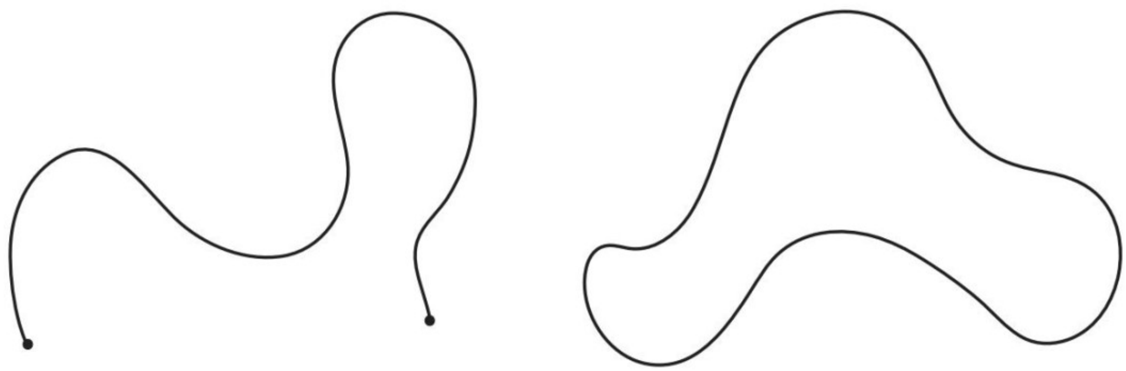
数学与物理学的相互作用是一种双向过程，两个学科相互启发、相得益彰。有时候，其中一个学科在研究某个概念时会取得领先优势，最终却促使另一个学科的研究焦点发生转移。总的来看，两个学科之间的相互作用是一种良性循环。

* * *

现在，我们已经对数学家与物理学家的一些深刻独到的见解有所了解，接下来，我们把电磁对偶性应用到规范群为G的四维规范场论之中，就会得到规范群为L_G（即G的朗兰兹对偶群）的规范场论（注意，如果我们再次应用电磁对偶性，就会得到最初的群G。换言之，L_G的朗兰兹对偶群是G），Σ上与群G及L_G相关的有效二维西格玛模型也将彼此相等或对偶。对于西格玛模型而言，这种对偶性叫作“镜像对称”（mirror symmetry）。在其中一个西格玛模型中，我们考虑由Σ至与群G相对应的希钦模空间$M(X，G)$的映射。在另一个西格玛模型中，我们考虑由Σ至与群L_G相对应的希钦模空间$M(X，L_G)$的映射。这

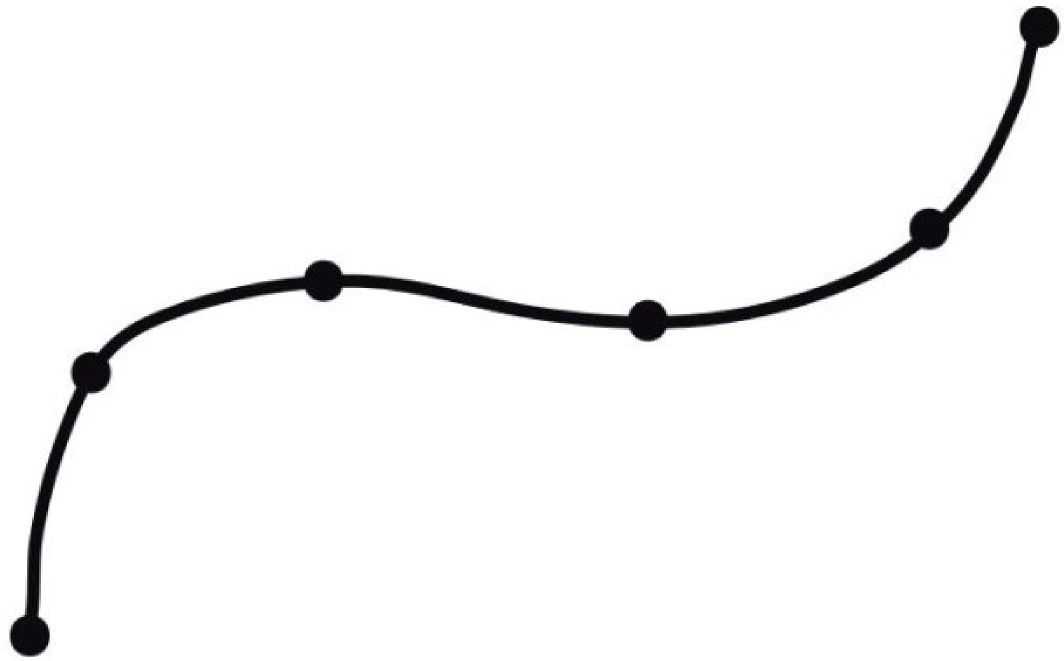
两个希钦模空间以及它们的西格玛模型，彼此之间并不存在任何先验关系，但它们竟然可以形成镜像对称，这就像四维规范场论具有电磁对偶性一样令人吃惊。

物理学家之所以对这种二维西格玛模型感兴趣，部分原因是这些西格玛模型在弦论中可以发挥重要作用。弦论认为自然界的基本对象不是点状基本粒子（没有内部几何结构，维数为零），而是纵向延伸的一维对象，即弦。这些弦要么是开弦，有两个端点，要么是闭弦，构成小圈，就像我们在第10章里讨论的那些圈一样。

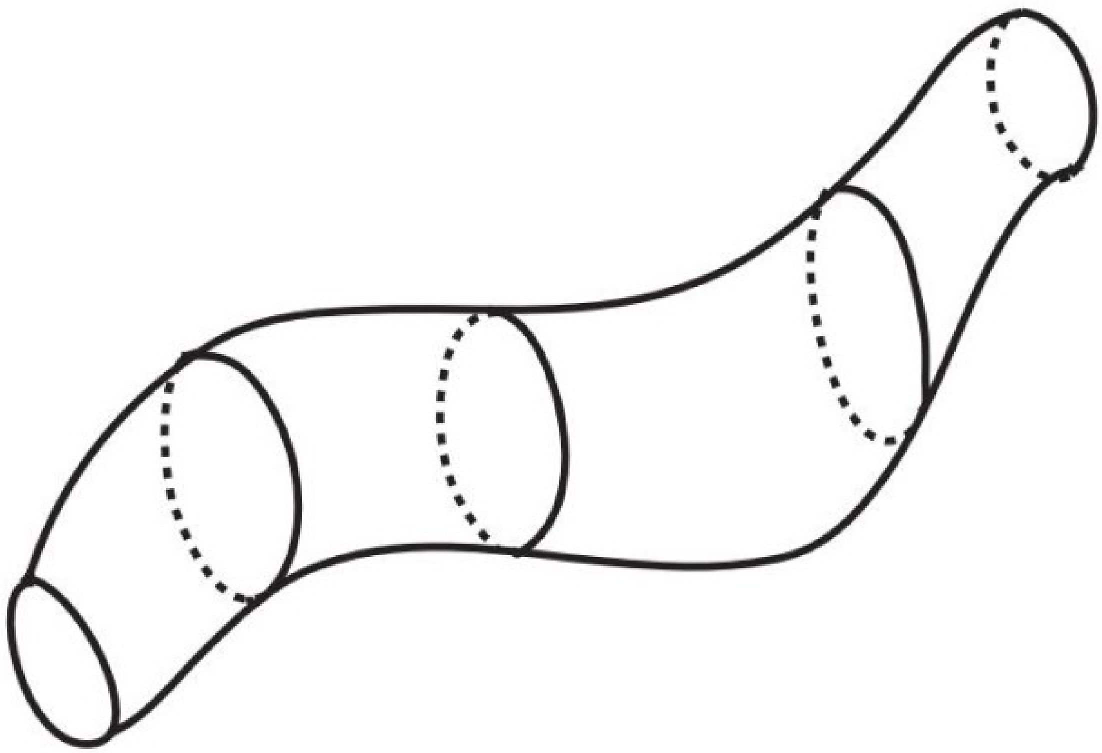


弦论还认为，当这些微小的弦在时空中运动时，其自身的振动会形成基本粒子及基本粒子间的相互作用力。

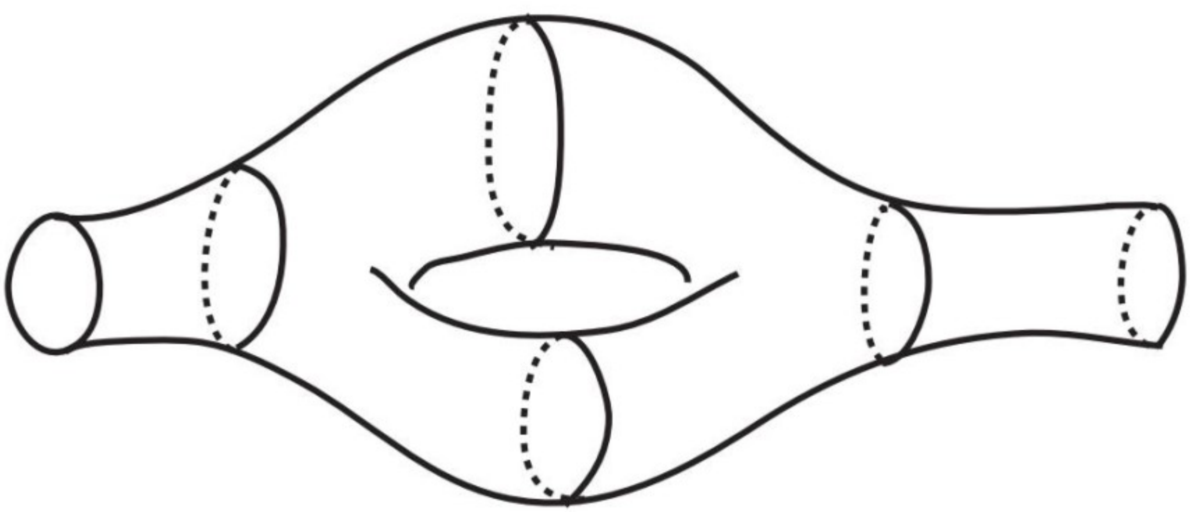
只要我们考虑弦的运动，就会用到西格玛模型。在标准物理学中，点状粒子在空间中的运动轨迹是一维的，该粒子在不同时间点的位置可通过该运动轨迹上的点来表示。



而闭弦在运动时，则会掠过一个二维曲面。因此，该弦在某个时间点的位置是由该曲面上的圈表示的。



一条弦可以“分裂”成两个或多个部分，这些部分还可以结合到一起，如下图所示。由此我们得到更具一般性的黎曼曲面，其“孔洞”数目可为任意值，并且边界面呈环形，这就是弦的“世界面”（worldsheet）。



这样的运动轨迹可以用嵌入时空S的黎曼曲面Σ表示，也可以表示成由Σ至S的映射，而且这些映射正好是曲面Σ上的西格玛模型中目标流形为S的映射。不过，这是一种颠倒的映射关系：在这些映射中，时空S是该西格玛模型的目标流形，即映射的接收方，而不是发出方，这与电磁理论等传统的量子场论正好相反。

弦论认为，通过这些西格玛模型中的计算，以及对所有可能的黎曼曲面Σ（即弦在固定时空S中传播的所有可能路径）上的计算结果求和，就可以复现我们在时空S中观察到的各种物理性质。

可惜的是，上述研究得出的结论面临很多难题的挑战。比如，该理论认为“超光速粒子”（tachyon）是存在的，而爱因斯坦相对论则认为这种粒子不存在，这是我们需要解决的一大难题。如果我们研究弦论的超对称扩展结构，并得出超弦论，状况就会大为改观。但是，超弦论仍然会遇到一个问题：除非我们的时空S的维数为10，超弦论才符合数学规律，可是我们观察到的只是一个四维世界（三维空间加上时间维度）。

不过，根据前面的讨论，我们身处的这个世界也有可能是我们观察到的四维空间与一个极小的六维流形M的乘积，只不过这个六维流形非常小，我们无法利用现有的工具观察到它。如果真是这样，这就与我们在上文中讨论的降维（由四维减至二维）非常相似，该十维理论有可能产生有效的四维理论。人们希望这个有效理论可以描述我们的宇宙，而且可以把标准模型及万有引力量子论包含其中。近年来，人们广泛研究弦论，其主要原因就在于该理论有可能成为囊括自然界所有已知作用力的统一理论。

但是，我们还需要回答一个问题：这个极小的六维流形M是什么呢？

为了让大家了解这个问题的难度，我们假设（这只是一个假设，目的是便于向大家解释）超弦论在六维流形（而不是十维流形）中符合数学规律。在这种假设前提下，该流形仅比我们身处的四维空间多出了两个维度，因此我们只需要找到一个合适的二维流形*M*即可。此时，可选择的余地并不大：*M*只能是一个黎曼曲面。而且，我们知道，各种黎曼曲面之间的差别在于其“孔洞”数。此外，研究发现，*M*还必须具备其他特性，上述理论才可行。例如，*M*必须是“卡拉比–丘流形”（Calabi-Yau manifold）。由于最早通过数学方法研究这些空间（比物理学家对这个领域产生兴趣的时间早许多年）的是两位数学家，尤金尼奥·卡拉比（Eugenio Calabi）和丘成桐，因此该流形以他们的名字命名。具有这种特性的唯一一种黎曼曲面是环面，因此，如果*M*是二维流形，那么它只能是环面。不过，随着*M*的维数增加，适合的流形种类也会增加。据估计，如果*M*是六维流形，其可选择的流形的种类将会多到令人无法想象的程度，约有10^{500}个。那么，我们这个宇宙究竟应该选用哪一种六维流形呢？我们又如何通过实验来验证它呢？这是弦论尚未解决的重要问题之一。

但是，不管怎么说，上面的讨论都清楚地告诉我们，西格玛模型在超弦论中起到了重要作用。事实上，西格玛模型的镜像对称可以追溯至超弦论的对偶性。除了弦论，西格玛模型在其他领域也有很多应用。物理学家不仅研究了目标流形M是六维流形的西格玛模型，他们还对其他西格玛模型展开了深入细致的研究。

* * *

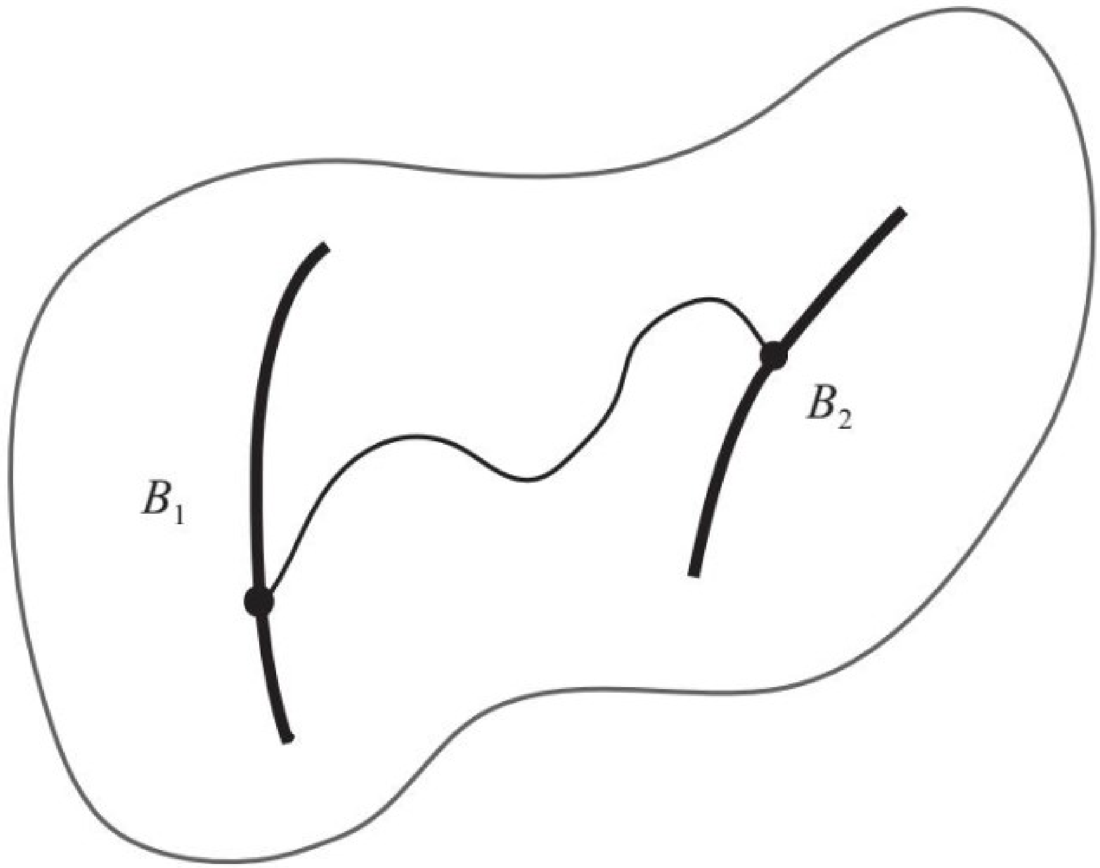
基于此，威滕在2004年的这次会议上发言时，他首先用降维（从四维减到二维）的方法把（规范群分别是G和L_G的）两个规范场论的电磁对偶性，转换成两个西格玛模型（其目标流形分别是与两个朗兰兹对偶群G和L_G相关的希钦模空间）的镜像对称。接着，他问：“我们可以在镜像对称与朗兰兹纲领之间建立联系吗？”

他的这个思路非常神奇。通常，在量子场论中，我们的研究对象是描述粒子相互作用的相关函数，例如，用来描述某种粒子在另外两种粒子碰撞中出现概率的相关函数。不过，研究表明，量子场论的形式多种多样，除了这些函数以外，量子场论中还有其他很多更加微妙的研究对象。这些对象与我们在第14章中讨论格罗滕迪克的“字典”时提到的“层”颇为相似。人们从单词“membrane”（膜）中截取一部分，把量子场论的这些研究对象称作“D膜”（D-brane），简称“膜”。

膜这个概念最初出现在超弦论的讨论中。当我们思考开弦在目标流形M上的运动情况时，就会用到膜的概念。描述开弦两个端点位置的最简单方法，就是设定它们分别属于M的两个子集B_1和B_2，如下图所示。图中细线表示有两个端点的开弦，一个端点在B_1上，另一个端点在B_2上。

这样，子集（更准确的名称应该是“子流形”）B_1和B_2就变成了超弦论及某对应的西格玛模型中的“运动员”，它也是超弦论中一般膜的原型。

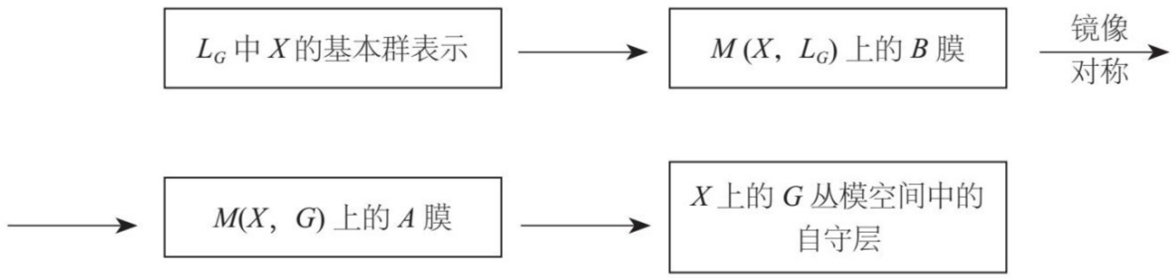
由于两个西格玛模型可以形成镜像对称，因此它们的膜也会产生某种关系，即“同调镜像对称”。20世纪90年代中期，数学家马克西姆·孔采维奇（Maxim Kontsevich）首先提出这种关系。随后，物理学家与数学家开始全面研究这种关系，在最近10年里，这种研究更是进行得如火如荼。



把威滕在普林斯顿的这次发言稍加归纳就会发现，他认为与朗兰兹关系对等的正是这种同调镜像对称。

我们需要注意的是，西格玛模型有两种类型，即“*A*模型”和“*B*模型”。我们现在思考的两个西格玛模型事实上并不相同：目标流形为希钦模空间$M(X，G)$的是*A*模型，而目标流形为$M(X，L_G)$的是*B*模型。因此，这两个理论中的膜也分别被称为“*A*膜”和“*B*膜”。在镜像对称的条件下，对于$M(X，G)$上的每一个*A*膜，在$M(X，L_G)$上都应存在一个*B*膜，反之亦然。

为了建立几何朗兰兹关系，我们必须把自守层与*X*在^LG中基本群的各种表示联系起来。威滕提出可以利用镜像对称构建这种联系，如下图所示。



尽管威滕的这个提议有待进一步完善，但他为如何建立电磁对偶性与朗兰兹纲领的联系指出了方向，这已经是一大突破了。一方面，他把数学家们尚未发现的大量新概念（当然与几何朗兰兹纲领没有关系）引入现代数学，包括膜的分类、希钦模空间在朗兰兹纲领中的特殊作用，以及A膜与朗兰兹纲领之间的联系等。另一方面，研究电磁对偶性与朗兰兹纲领之间的联系，有助于物理学家运用数学的理念与深刻见解，去加深对量子物理学的理解。

* * *

在这次会议之后，威滕花了两年时间，与加州理工学院的俄罗斯裔物理学家安东·卡普斯京（Anton Kapustin）共同完善了他的这个提议的相关细节。2006年4月，他们基于对这个领域的研究合写了一篇论文（长达230页），这篇文章受到物理学界与数学界的一致赞誉。它的第一段提及了本书讨论的诸多概念：

> 数域的朗兰兹纲领统一了数论中大量的经典成果与现代成果，是一个前景广阔的研究领域。朗兰兹纲领为有限域平面上的曲线构建了一个类比对象，有限域平面上的曲线一直是一个非常重要的研究课题。此外，几何朗兰兹纲领对于曲线的研究，无论是具有特征p的有限域平面上的曲线，还是普通的复杂黎曼曲面，都已经取得了显著进展……本文主要研究复杂黎曼曲面的几何朗兰兹纲领，目的是揭示该纲领在量子场论中的重要作用。在开展研究之前，我们假设人们并不熟悉朗兰兹纲领，但是默认大家对超对称规范场论、电磁对偶性、西格玛模型、镜像对称、膜及拓扑场论等学科已经有

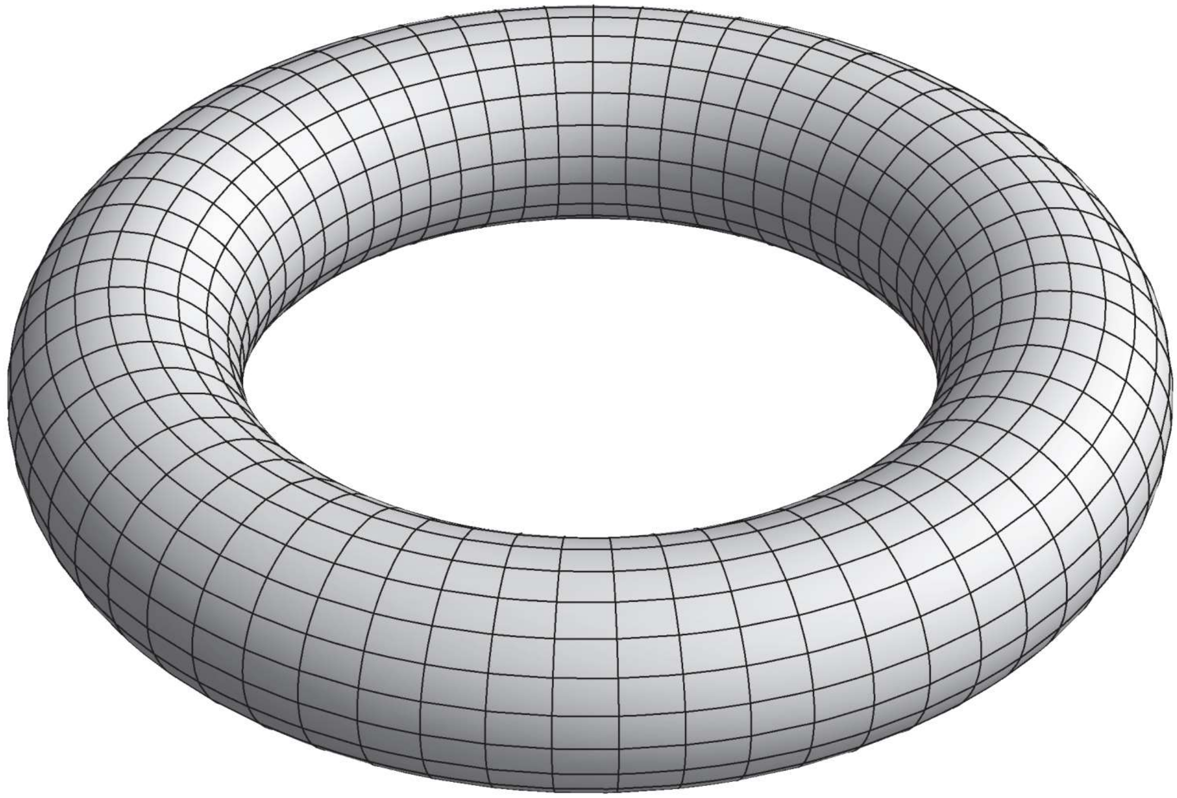
了一定的了解。本文旨在向大家指出，我们在应用上述学科中大家非常熟悉的知识解决相应的问题时，将会用到朗兰兹纲领。

随后，卡普斯京和威滕在论文的引言部分指出，他们的研究始于我们在普林斯顿高等研究院举行的这次会议（他们还特别提到我的学生戴维·本–兹维在这次会议上的发言）。

在论文的正文部分，卡普斯京和威滕进一步拓展了威滕在普林斯顿会议发言中提出的那些观点，并阐明了*A*膜与*B*膜构架、两者之间的镜像对称以及*A*膜与自守层之间的联系。

为了介绍他们的研究成果，我们先看一个关于镜像对称的简单例子。卡普斯京和威滕研究的是两个希钦模空间及其对应的西格玛模型之间的镜像对称，现在，我们把其中一个模空间替换成一个二维环面。

二维环面可以看成是两个环的乘积，下图中的网线清楚地表明，该环面看上去就像一个串珠项圈：



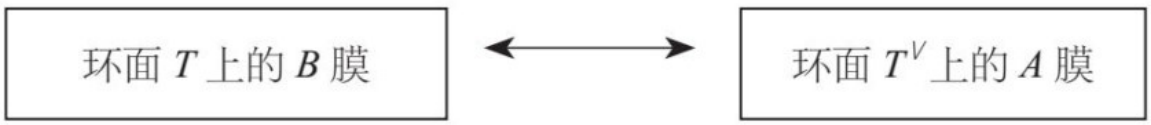
网线中的横向圆环就是一个个“串珠”，我们可以想象在环面中间有一个水平圆环，它就是把串珠串成项圈的链子。在数学家眼中，这个项圈是一个“纤维化结构”，“纤维”是一个个串珠，“基座”是那条链子。也就是说，这个圆环是一个纤维化结构，纤维是一个个圆环，基座也是一个圆环。

我们把基座圆环（链子）的半径记作R_1，把纤维圆环（串珠）的半径记作R_2。研究表明，该结构的镜像对偶流形也是一个环面，但是该环面是半径分别为$1/R_1$和$1/R_2$的两个圆环的乘积。半径互为倒数的现象，与电磁对偶性中电荷互为倒数的现象非常相似。

这样一来，我们就有两个镜像对偶环面了。我们把其中一个记作T，半径分别为R_1和R_2，把另一个记作$T^\vee$，半径分别为$1/R_1$和R_2。注意，如果T的基座圆环很大（即R_1很大），$T^\vee$的基座圆环就会很小

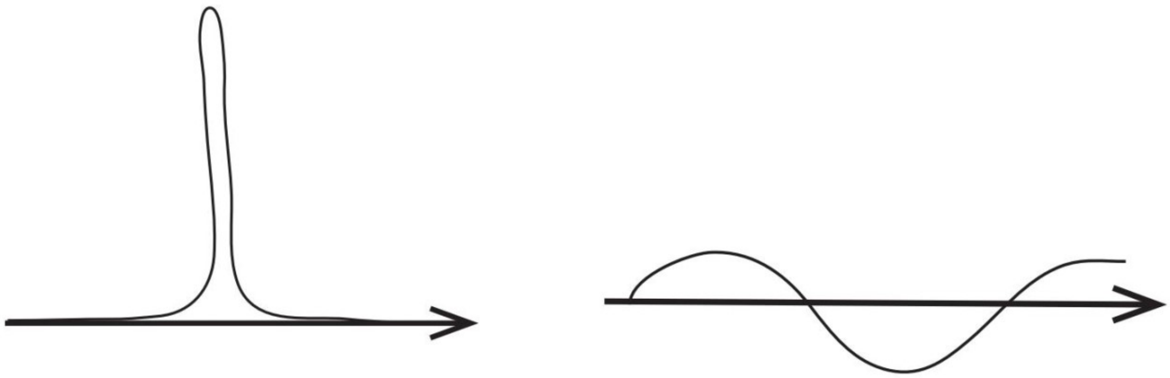
（因为$1/R_1$的值非常小），反之亦然。“大”“小”的交错对应是量子物理学中一种非常常见的对偶关系。

我们研究T上的B膜和$T^\vee$上的A膜。不难理解，两者在镜像对称中构成对应关系（有时这种对应关系又被称作“T对偶”，其中T代表环面）。



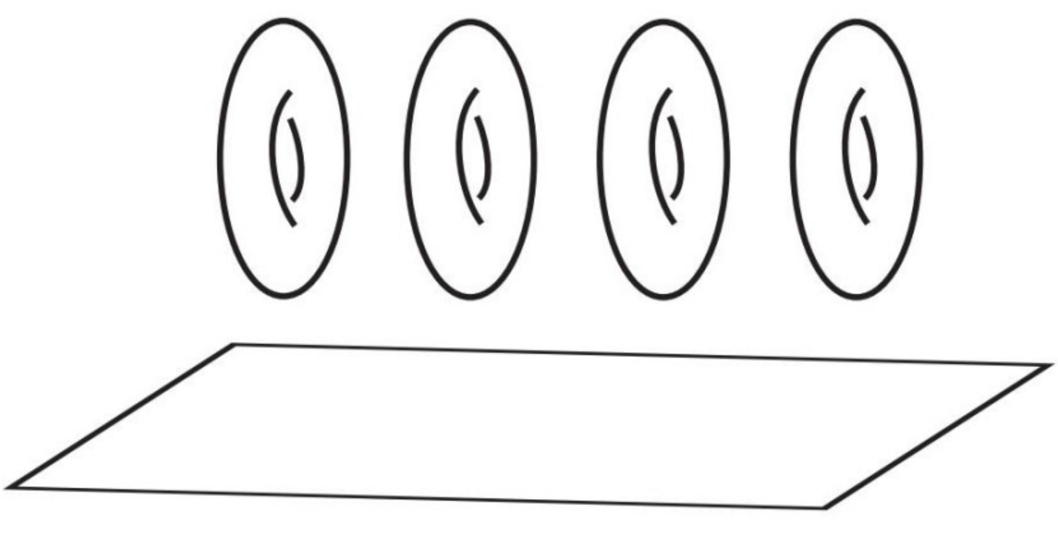
“零膜”（zero-brane）是T上的一种常见的B膜，在环面T上的p点收缩。研究发现，与B膜不同，与之对偶的环面$T^\vee$上的A膜则会“附着”在整个环面$T^\vee$的上面。这里，我们使用“附着”这个词是有原因的，不过如果对此进行深入解释，就会偏离我们现在关注的内容。实际上，环面$T^\vee$上的A膜几乎就是环面$T^\vee$本身，只不过A膜大多具备某种结构，即A膜循环群的基本群表示（与第15章讨论的内容相似）。该表示由原点p在环面T上的位置确定，因此，在环面T上的零膜与“附着”在环面$T^\vee$上的A膜之间，实际上存在着一一对应关系。

这种现象与信号处理领域广泛使用的傅里叶变换十分相似，如果我们对在某个时间点附近收缩的信号进行傅里叶变换，就会得到类似于波的信号。如下图所示，经过傅里叶变换的信号就像“附着”在表示时间的直线上。



傅里叶变换可以应用于多种类型的信号，我们也可以通过它的逆变换，还原出原始信号。我们还经常要将复杂信号转换成简单信号，因此，傅里叶变换的用途十分广泛。同样，在镜像对称的作用下，一个环面上的复杂的膜对应另一个环面上简单的膜，反之亦然。

研究表明，我们可以用这种环面的镜像对称，去描述两个希钦模空间中的膜之间的镜像对称。此时，我们需要应用这些模空间的一个重要特性（希钦本人描述过该特性），即希钦空间是一个纤维化结构。该纤维化结构的基座是向量空间，纤维则是一个个环面。也就是说，整个希钦空间就是一系列环面，其基座中的每个点都会有一个环面与之对应。在最简单的结构中，基座与圆环纤维都是二维结构，整个纤维化结构如下图所示（注意：基座不同点处的纤维尺寸不同）：



我们可以把希钦纤维化结构视为一盒甜甜圈，只不过甜甜圈与盒底的接触点并没有构成一个点状的网，而且盒底的每个点都与某个甜甜圈有接触。因此，我们必须有无穷多个甜甜圈——有这么多的甜甜圈，霍默·辛普森[注]肯定非常高兴！

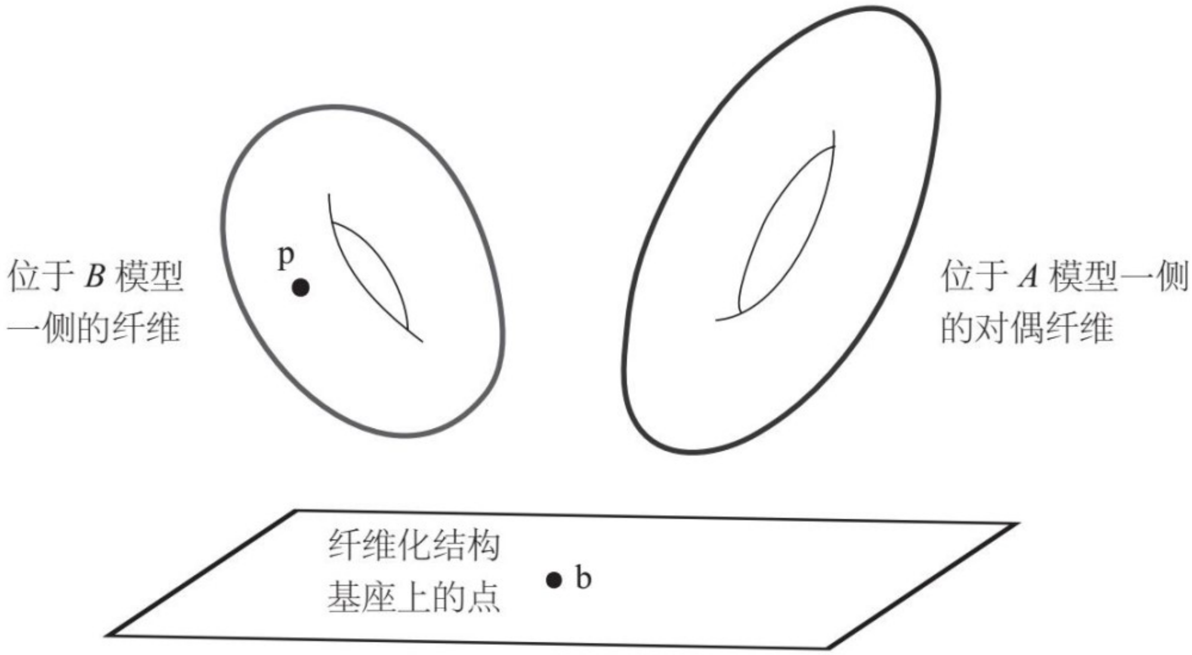
研究发现，与朗兰兹对偶群相关的镜像对称希钦模空间也是相同基座上的一个“甜甜圈”（环面纤维化结构）。（“有了油炸圈，还有什么是做不了的呢？”）

这就意味着，在这个基座的每个点上，都存在两个环面纤维：一个是位于A模型一侧的希钦模空间，另一个是位于B模型一侧的希钦模空间。此外，这两个环面按照上述方式彼此构成镜像对称关系（如果其中一个环面的半径是R_1和R_2，另一个环面的半径就为$1/R_1$和$1/R_2$）。

在通过观察得出这些结论之后，我们就可以借助对偶环面纤维之间的镜像对称，来研究两个对偶希钦模空间的纤维之间的镜像对称。

例如，设p为希钦模空间$M(X，L_G)$中的一个点，我们取在该点收缩的零膜，那么$M(X，G)$上的镜像对偶A膜是什么呢？

p是环面上的一点，该环面是$M(X，L_G)$在基座点b处的纤维（下图中左侧的环面，位于B模型一侧），其对偶环面（下图中右侧的环面，位于A模型一侧）则是$M(X，G)$在同一点b处的纤维。我们在$M(X，G)$上寻找的对偶A膜就是“附着”在该对偶环面上的A膜，与我们从这两个环面的镜像对称中得到的对偶环面相同。

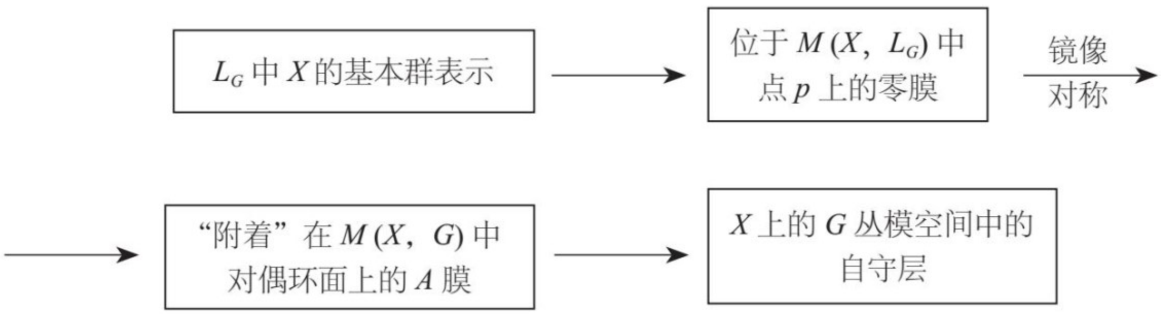


此前，安德鲁·斯特罗明格（Andrew Strominger）、丘成桐和埃里克·让斯罗（Eric Zaslow）等人提出过这种通过对偶环面的纤维化结构，从纤维的角度描述一般情况下的镜像对称的方法。现在，这种方法被称作SYZ猜想或SYZ机制。这种方法的效果十分显著，尽管人们已经十分了解对偶环面的镜像对称，但是一般流形（如希钦模空间）的镜像对称仍然十分神秘。因此，把一般流形的镜像对称简化为环面的镜像对称，可以为我们的研究创造很多便利条件。当然，为了实现这个目的，我们必须把两个镜像对偶流形表示为同一基座上的对偶环面的纤维化结构（同时，这些纤维化结构必须满足某些条件）。幸运的是，在希钦模空间中的确存在这样的纤维化结构，因此，我们可以应用SYZ机制。（环面纤维的维数一般都大于二，但是其整体情况相似。）

现在，我们用镜像对称来构建朗兰兹关系。首先，研究表明，希钦模空间$M(X，L_G)$中的点正好是黎曼曲面X在L_G中的基本群表示。我

们取在该点收缩的零膜，根据SYZ机制，对偶*A*膜将“附着”在对偶环面之上（对偶希钦模空间中的纤维则位于基座上相同点的上方）。

卡普斯京与威滕不仅详细地描述了这些*A*膜，而且解释了如何将它们转变成几何朗兰兹关系的自守层。因此，我们可以通过下图所示流程来实现朗兰兹关系：



这个关系中出现了一个至关重要的媒介，即A膜。卡普斯京和威滕提出，可以通过两个步骤来构建朗兰兹关系。他们首先利用镜像对称构建A膜，然后在A膜的基础上构建自守层。到目前为止，我们的讨论只涉及了第一个步骤，即镜像对称。与第一个步骤一样，第二个步骤也非常有意思。事实上，正是因为卡普斯京和威滕具有敏锐的洞察力，他们才发现A膜与自守层之间存在这种联系，而在他们提出之前，人们根本不知道其存在。此外，卡普斯京和威滕还提出，在更为普遍的情况下，这种联系依然存在。受到这个令人吃惊的想法的驱动，很多人的数学研究都取得了丰硕的成果。

* * *

我父亲认为，上述这些内容太复杂深奥了。是啊，我们有希钦模空间、镜像对称、A膜、B膜、自守层……这些内容的确会让人晕头转向。事实上，即使是这方面的专家，真能弄清楚这个构架包含的所有内容的人也是凤毛麟角。不过，我并不奢望大家能了解这些概念，而是希望揭示它们之间的逻辑关系，以及让大家了解科学家研究这些概

念的创造性过程：他们的动机是什么？他们是如何相互学习、相互交流的？他们的发现对我们理解一些关键性问题有怎样的推动作用？

不过，为了便于大家理解，我们可以借助下表来表示各研究对象之间的类似性。表中包括韦伊“罗塞塔石碑”三个轨道的概念，以及量子物理学领域的研究对象。下表是对第206页“罗塞塔石碑”图的扩展。（我把“罗塞塔石碑”左边与中间的那两个轨道合并在一起，因为这两个轨道中的对象极其相似。）

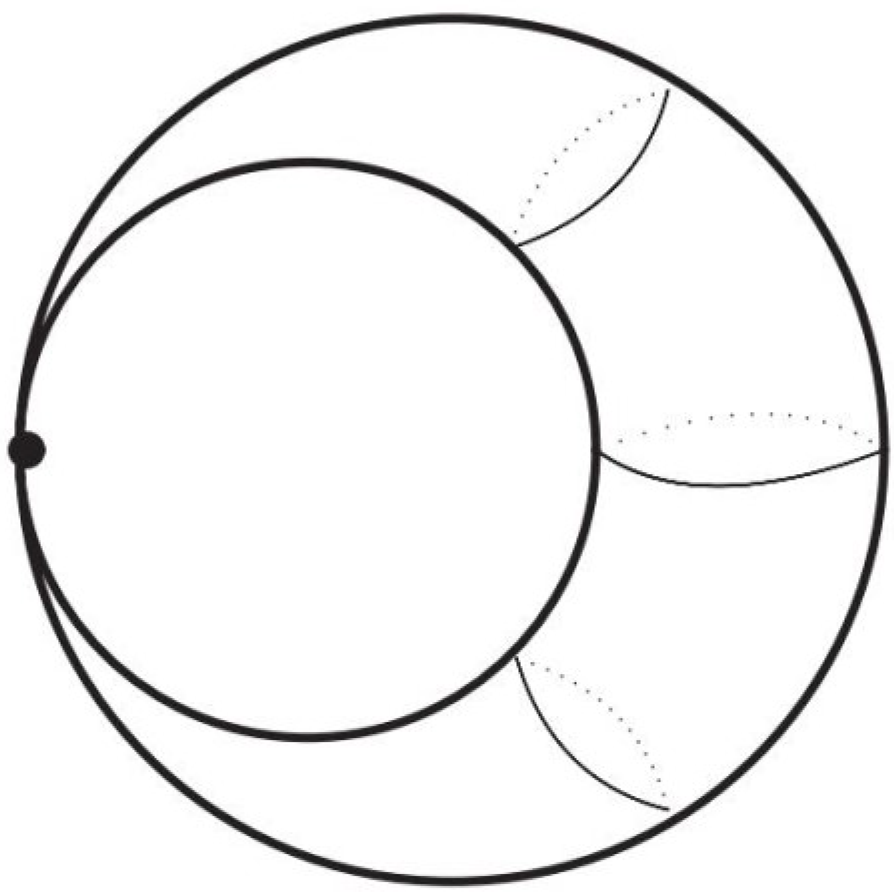
数论及曲线 / 有限域	黎曼曲面 X	量子物理学
朗兰兹关系	几何朗兰兹关系	电磁对偶性、镜像对称
伽罗瓦群	X 的基本群	X 的基本群
伽罗瓦群在 L_G 中的表示	基本群在 ^LG 中的表示	M（L_G，X）上的零膜
自守函数	自守层	M（G，X）上的 X 膜

看了上表之后，父亲问我：卡普斯京和威滕是怎么拓展朗兰兹纲领的？这个问题当然具有重要意义。首先，他们在朗兰兹纲领与镜像对称、电磁对偶性之间建立了某种联系，这样一来，我们就可以利用量子物理学在该领域的大量研究成果，进一步拓展朗兰兹纲领。反过来，若朗兰兹纲领的理念被引入到物学领域，又会引导物理学家在电磁对偶性领域提出一些他们以前根本不会想到的问题。这种联系已经创造了一些非常了不起的发现。其次，研究发现，A膜这种数学语言非常适合朗兰兹纲领研究。我们都知道自守层异常复杂，而很多A膜的结构则简单得多。借助A膜这种语言，朗兰兹纲领中某些神秘莫测的难题将会迎刃而解。

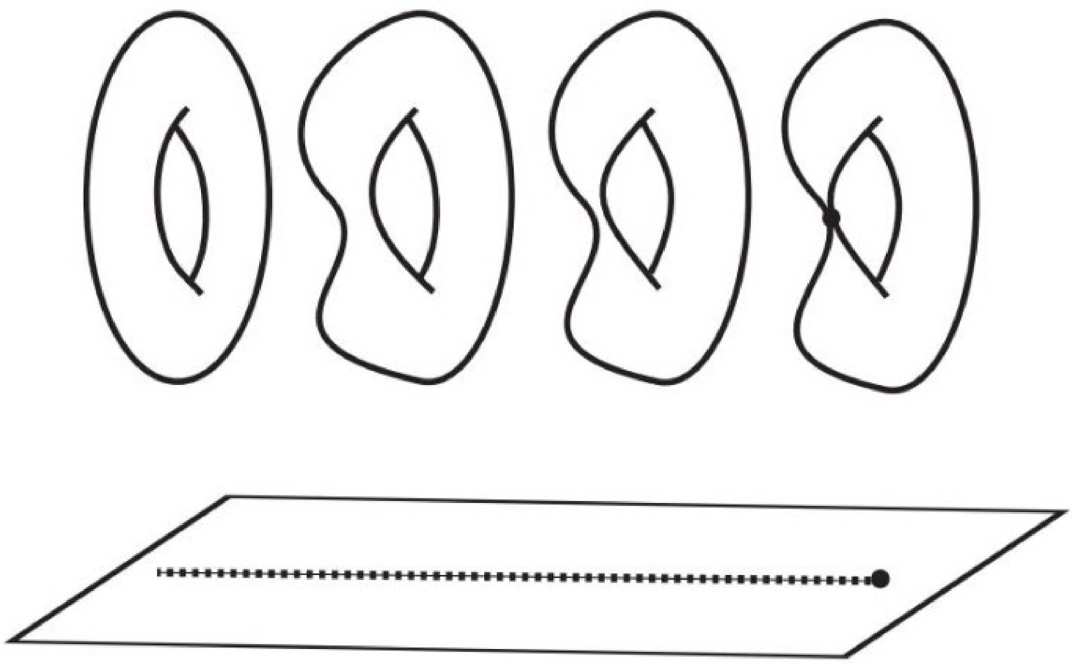
下面，我举个具体的例子，来说明这种新语言的应用情况。在这次普林斯顿会议之后，我和威滕展开了一项合作，并于2007年完成。为便于大家理解我们这项合作的内容，我先向大家介绍本书一直在有意无意回避的一个问题。在上述讨论中，我假定两个希钦模空间中的

纤维都是我们常见的光滑环面（就像上文图中所示的那些形状规则的环面）。实际上，大多数纤维确实如此，但还有一些纤维有所不同，它们是光滑环面变异后形成的。如果没有这些变异的结构，那么SYZ机制足可以完整地描述两个希钦模空间上膜的镜像对称。但是，当这种变异的环面出现之后，镜像对称性的复杂程度就大大增强了。镜像对称最有趣、但也是最复杂的部分，就是“寄居”在这些变异环面上的膜所产生的镜像对称。

卡普斯京和威滕在他们的论文中只考虑了光滑环面上的镜像对称，因此，变异环面上的镜像对称仍然是一个空白的研究领域。在我和威滕合作完成的论文中，我们解释了最简单的变异环面上的镜像对称。这种环面具有“迹形奇点”（orbifold singularity），如下图所示：



图中这种被压扁的环面实际上就是一种变异的纤维，只不过其中的黎曼曲面X是一个环面，而且L_G群是SO(3)群（该结论直接引自我与威滕合写的那篇论文）。在这种情况下，希钦纤维化结构的基座是一个平面。对于该平面上的几乎所有点来说（除了三个特殊点），纤维都是寻常的光滑环面。也就是说，除去这三个点，该希钦纤维化结构就是一组光滑环面（甜甜圈）。不过，在这三个点各自的邻域中，环面纤维（甜甜圈）的“颈部”会塌陷，如下图所示。在该图中，我们沿着基座中的给定路径观察各点上方纤维的情况。



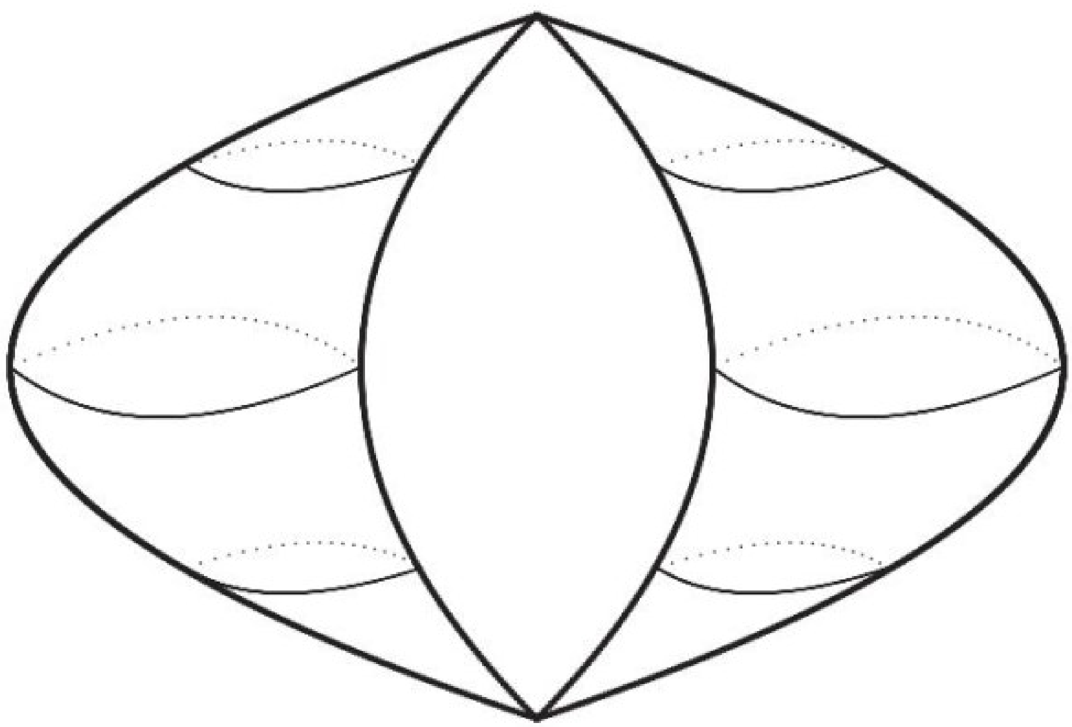
看来，当霍默·辛普森看到盒子里装有无穷多个甜甜圈时，他非常兴奋，结果一不小心踩到盒子上，把一些甜甜圈踩扁了（不过，我们无须为霍默担心，因为盒子里仍然有无穷多个完好无损的甜甜圈）。

我们越靠近基座中被标记出来的那个点（三个特殊点中的一个），纤维环面的颈部就越扁，当到达标记点时，甜甜圈就会塌陷。在上图中，我们从一个不同的角度展示了标记点处的纤维状况。此时，纤维不再是一个环面，而是一个变异环面。

我们需要回答的问题是：希钦模空间中的零膜在变异环面的特殊点（如上图中的标记点，在此处，环面颈部塌陷）处收缩时，环面发生了什么变化？数学家给出的答案是迹形奇点。

研究发现，该点还有一个对称群。在上述例子中，该点的这个对称群与一只蝴蝶的对称群相同。换言之，该群不仅包含恒等元，还有一个与翻转蝴蝶翅膀相对应的元素。这意味着在该点处收缩的不是一个零膜，而是两个不同的零膜。于是，我们的问题就变成：在对偶希钦模空间中的两个A膜是什么？[注意，在这种情况下，G就是SU(2)群，也就是SO(3)群的朗兰兹对偶群。]

我和威滕在论文中指出，在希钦纤维化结构基座中的三个特殊点处，与其构成镜像对偶的变异环面具有如下图所示的特点（该图引自我们合写的论文）：



该希钦纤维化结构表现出与前一幅图相似的特点，不过随着我们逐渐靠近基座上的特殊点，环面上有两个地方变得越来越扁，当我们

到达该特殊点时，这两个地方都会塌陷。由于环面在两个地方塌陷，因此其对应的变异纤维与前一幅图中的纤维大不相同。该变异环面包含两个部分，数学家称之为“组分”（component）。现在，我们可以回答那个问题了。我们寻找的两个A膜（与在第一个变异环面的迹形奇点处收缩的两个零膜构成镜像对偶），就是“附着”在对偶变异环面的两个组分上的*A*膜。

这就是一般情况下镜像对称的原型。如果我们把这两个希钦模空间看作同一个基座上的两个纤维化结构，就会发现在这两个结构中都有变异纤维，不过变异机制是不同的。如果在*B*膜一侧存在一个具有内对称群（如蝴蝶的对称群）的迹形奇点，那么在*A*膜一侧的纤维就会包含若干组分（如上图中的两个组分）。研究发现，这些组分的个数与在*B*膜一侧的对称群中元素的个数相同。这个特点可以确保在迹形奇点处收缩的零膜，正好与“附着”在这些不同组分上的*A*膜相对应。

在我和威滕合作完成的这篇论文中，我们详细地分析了这个现象。令人惊奇的是，我们不仅因此在黎曼曲面的几何朗兰兹纲领这个领域有所发现，而且对韦伊“罗塞塔石碑”中间的轨道（关于有限域平面上的曲线）也有了一些深刻的认识。这个例子充分说明，在某一个领域（量子物理学）中形成的想法与认识，有可能会反过来对朗兰兹纲领的基础内容产生影响。

这种联系的重要作用充分地体现在我们的研究成果之中。现在，我们发现韦伊“罗塞塔石碑”不止三个轨道，还应该加上第四个轨道——量子物理学。当我们在第四个轨道中有新发现时，就会研究其他三个轨道中应该会有哪些类似的发现。这个方法变成我们发掘新想法，获得新认识的源泉。

* * *

我和威滕于2007年4月开始合作这个项目，当时我正在普林斯顿高等研究院访问。这篇论文是在当年的10月31日完成的，正好是万圣节。（这个日子我记得非常清楚，因为那天我在网上提交完论文之后，就去参加一个万圣节的庆祝晚会了。）在这7个月的时间里，我去了研究院三次，每次大约逗留一周时间，在这一周里的每一天，我和威滕都会在他那间布置得很温馨的办公室里埋头钻研。而其余的时间里，我们则各自做研究。我基本上在伯克利与巴黎两地奔波，还在里约热内卢待了两周，走访了那里的一所数学学院。不过，我在哪里并不重要，只要能上网，我和威滕的合作就不会受到影响。在交流最频繁的时候，我们一天就会有十几封邮件往来。我们通过邮件交流对某个问题的思考，或者把论文草稿发送给对方。由于我们的名字相同，因此我们的邮件也形成了某种镜像对称：每封邮件的抬头都是“亲爱的爱德华”，落款则都是“祝好！爱德华”。

由于这次合作，我得以近距离地接触威滕，他的学术能力与职业道德都让我赞叹不已。我记得在选择研究内容时，他投入了大量的时间与精力。在前文中我说过，在这方面需要解决的问题非常多，可能需要花350年才能完全解决，因此，我们必须认真评估某个问题的“性价比”，也就是说不仅要考虑其研究价值，还要考虑在合理时间内取得成功的概率。我觉得威滕的直觉非常准确，判断能力也非常强。一旦确定了研究课题，他就会坚持不懈、埋头钻研，很像汤姆·克鲁斯（Tom Cruise）在电影《借刀杀人》（*Collateral*）中饰演的那个角色。他在研究中十分讲究方法，而且考虑周详，不会有任何遗漏。当然，和普通人一样，他也经常有困惑的时候。不过，每次他都能找到解决办法。总之，与他的这次合作，在很多方面都对我有所启迪和帮助。

朗兰兹纲领与电磁对偶性的联系迅速成为一个研究热点，并发展成为一个朝气蓬勃的研究领域。在这个发展过程中，我们在圣芭芭拉卡夫里研究所组织的理论物理学年会起到了至关重要的推动作用，该

研究所的主任、诺贝尔奖获得者戴维·格罗索（David Gross）给予了大力支持。

2009年6月，我应邀在布尔巴基研讨会上发言，介绍这个领域取得的新进展。该研讨会发起于“二战”结束后不久，是世界上历史最悠久的数学研讨会，在数学界享有盛誉。研讨会成员利用周末时间，每年在巴黎的亨利·彭加莱研究所（Henri Poincare Institute）召开三次会议，每次都有许多数学家踊跃参会。研讨会的创办人是一群年轻而有天赋的数学家，他们杜撰了一个名字，自称“尼古拉·布尔巴基合作者协会”（Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki）。研讨会的理念是，以乔治·康托尔（Georg Cantor）于20世纪末提出的集合论为基础，利用一套严格的新标准改写数学的基础内容。尽管他们未能完全实现自己的目标，但研讨会却在数学家当中产生了巨大的影响。安德烈·韦伊是创办人之一，亚历山大·格罗滕迪克后来也是其中的一个重要人物。

布尔巴基研讨会的目的是报告数学家们所取得的最显著成果。从创办之初，研讨会就设立了一个秘密委员会（按照规定，委员会成员的年龄不得超过50岁），成员们负责挑选会议主题，并确定发言人选。显然，布尔巴基研讨会的创始人认为他们必须不断向活动中注入新鲜血液，这个原则保证了该项活动得以顺利延续。委员会负责邀请发言人，并要求发言人提前写好发言稿，在研讨会召开时分发给参会者。由于在该研讨会上发言是一项荣誉，因此发言人都会遵从这个要求。

我参加的这次研讨会的主题是“规范场论与朗兰兹对偶”。我发言时采用了与本书差不多的语言风格，不过技术性很强，里面包含了很多公式与数学术语。我首先从安德烈·韦伊的“罗塞塔石碑”谈起，跟本书一样，我也简单地介绍了它的三个轨道。韦伊是布尔巴基委员会的成员之一，我觉得在研讨会上讨论他的观点与想法是非常合适的。然

后，我重点介绍了最新的研究成果，即如何在朗兰兹纲领与电磁对偶性之间建立联系。

我的发言深受参会者的欢迎。我看到让–皮埃尔·塞尔（Jean-Pierre Serre）坐在第一排，塞尔是布尔巴基委员会的另一个重要成员，也是一个传奇人物，看到他在场，让我感到尤为高兴。我的发言结束后，他走上前来，先是提出了几个尖锐的技术问题，然后对我的发言做了一番评论。

“你把量子物理学看成韦伊‘罗塞塔石碑’的第四个轨道，我觉得这个想法很有意思。”他说，“你知道，安德烈·韦伊本人并不怎么喜欢物理学。不过，如果他今天也来了，我觉得他肯定也会认为量子物理学是‘罗塞塔石碑’的一项重要内容。”

我觉得这是我得到的最好的赞扬。

* * *

近几年来，人们在朗兰兹纲领的研究上取得了许多进展，内容涉及韦伊“罗塞塔石碑”的所有轨道。虽然我们与彻底揭开朗兰兹纲领中的所有谜团这个目标尚有一段距离，但有一点我们可以确定：朗兰兹纲领经受住了时间的考验。现在，我们可以更加清楚地看到，朗兰兹纲领已经引领着我们与数学及物理学中最基本的问题渐行渐近。

近50年前，朗兰兹在写给安德烈·韦伊的信中提出了这些概念与想法；时至今日，其重要性也丝毫没有减弱。我不敢确定，在未来50年里，我们能否解答他提出的所有问题，但朗兰兹纲领无疑会大放异彩。在本书的读者当中，也许就有人会为这个迷人的课题做出贡献。

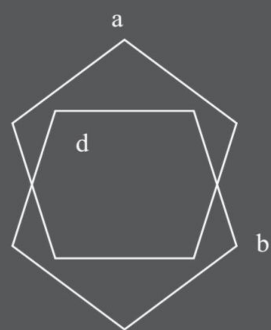
朗兰兹纲领是本书讨论的重点，它包含意义深奥的概念架构、开创性的洞见、富有诱惑力的猜想、意义深远的定理以及不同领域间令

人意想不到的联系，所有这一切都为我们了解现代数学提供了一个全景式的视角。它揭示了数学与物理学之间的微妙联系，让两个学科开展了有双赢效果的对话。此外，朗兰兹纲领还是一个典型范例，展示了我们在第2章讨论的数学理论应当具备的4个特性：普适性、客观性、持久性以及与物理世界的相关性。

当然，数学中还有很多分支领域也有引人入胜的魅力。在这些领域中，有的已经通过相关文献向非专业人士展现了其中的魅力，而有的领域却依然是“藏在深闺人不识”。亨利·戴维·梭罗（Henry David Thoreau）说过：“我们都听说过数学这首美妙的诗歌，但没有多少人为我们吟诵。”150多年过去了，他说的这种情形仍然没有改观。这说明，我们这些从事数学研究的人必须更加努力，向更多的人介绍这门学科的巨大作用以及蕴藏其中的美。与此同时，我希望我对朗兰兹纲领的介绍能激发读者的好奇心，激励他们钻研更多的数学知识。

---

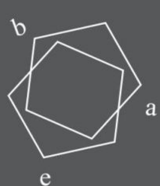
1. 霍默·辛普森（Homer Simpson）是美国动画片《辛普森一家》中的一个虚构角色。虽然贪吃、懒惰，还经常惹事，但他偶尔却能展现出自身的才智与价值。——译者注

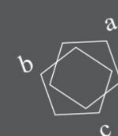


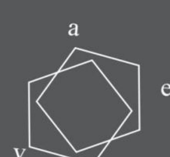




第 18 章 爱的公式与终极真理







2008年，我获得了巴黎数学基金会（Fondation Sciences Mathématiques de Paris）刚刚设立不久的Chaire d’ Excellence奖，并应邀去巴黎从事研究工作，以及通过演讲介绍我的研究成果。

巴黎是全球的数学中心之一，也是电影之都。身处这样的环境之中，我萌生了一个念头，想要拍摄一部介绍数学的电影。通俗电影往往会把数学家塑造成几近精神错乱、与社会格格不入的怪人，让观众觉得数学是一门与现实毫不相干、枯燥无味的学科。有谁愿意终其一生从事一项毫无现实意义的工作呢?

2008年12月，在我回到伯克利之后，决定开发我的艺术天赋。我的邻居托马斯·法贝尔（Thomas Farber）是一位优秀的作家，在加州大学伯克利分校教授创意写作课程。我问他：“我们能不能写一个介绍作家与数学家的剧本呢？”汤姆非常喜欢这个创意，他提出我们可以去法国南部，坐在沙滩上完成这个剧本。我们把剧本的开头确定下来：在一个阳光灿烂的日子，一位作家和一位数学家坐在沙滩上的露天咖啡馆的两张相邻的桌子旁。周围的环境十分优美，他们觉得很愉悦，并交流起来。接下来会发生什么呢?

这项工作跟我以前与数学家或物理学家的合作研究有些相似，但又有所不同：我们反复斟酌，用合适的词句描述人物的情感与心理活动，一步步地进入故事的核心。与我在数学研究中习以为常的整体框架相比，剧本的写作过程灵活多变，限制性要小得多。就这样，我与我尊重与崇拜的作家并肩战斗，开始了我们的合作。幸运的是，汤姆从来不将他的意志强加于我，而是通过平等的交流，让我能充分发挥自己的写作才能。我的几位导师将我带进了数学世界，汤姆则帮助我走进了写作的殿堂，我一直对他心怀感激。

在剧本中，有一次那位数学家跟作家谈到了“二体问题”（two-body problem）。这个问题是指两个对象（实体），例如恒星与行星，仅仅与对方发生相互作用（我们忽略发生在它们身上的其他作用

力）。只要知道它们彼此间的吸引力，我们就可以用一个简单的数学公式，准确地预测它们未来的运动轨迹。不过，如果这两个实体是人体，例如一对情人或好友，他们的相互作用就要复杂得多。在这种情况下，即使二体问题有解，那也不会是唯一解。

我们的剧本讨论的是现实世界与抽象世界之间的碰撞：身为作家的理查德看到的是文学与艺术的世界，身为数学家的菲利普看到的则是自然科学与数学的世界。在各自擅长的抽象领域，两人都如鱼得水，但是两人的这种碰撞对现实世界会产生哪些影响呢？菲利普试图一分为二地看待这个问题，想要在他擅长的数学真理与不擅长的人文真理之间取得平衡。他知道，如果把生活中遇到的问题也当作数学问题来处理，有可能会徒劳无功。

我和汤姆也经常思考一个问题：通过讲述这两个人的故事，我们能看到艺术与科学[查尔斯·斯诺（Charles Snow）称之为“两种文化”]之间的异同吗？事实上，我们可以认为这部电影是在类比人类的左脑和右脑。它们是同时存在于一个大脑中的两种“文化”，两者相互竞争又相互扶持。

在剧本中，两个角色还交流了他们的情感经历：他们是如何找到又失去真爱的，他们经历了哪些撕心裂肺的事。在这一天，他们也邂逅了几名女性，这两个家伙把对自己职业的热情当作吸引异性的工具。他们在很多方面志同道合，但矛盾也悄然而至，并且最终产生出了一个令人意想不到的结果。

我们把这个剧本命名为“二体问题”，它成书出版，之后由获奖导演芭芭拉·奥利弗（Barbara Oliver）执导排成戏剧，在伯克利剧院上演。这是我第一次涉足艺术领域，看到观众们的反应，我感到既惊诧又好笑。比如，大多数人认为剧本中发生在那位数学家身上的事实际上就是我的经历。当然，《二体问题》中有很多情节的确来源于真实生活，例如，我在巴黎有一个俄罗斯女友，剧本中为菲利普的女友娜

塔莉娅设计的很多显著特点，正是受到我女朋友特点的启发。剧本中有的情节来源于我的生活，有的则是源自汤姆的真实经历。不过，剧作者创作剧本的最大动机，就是塑造出性格鲜明的人物，设计出引人入胜的情节。在我和汤姆确定了目标之后，我们必须以某种方式来塑造这些人物。我们从真实生活中取材的那些体验，在经过润色加工之后，就再也不是我们自己的体验了。《二体问题》的主角就是剧中的角色，他们有自己的性格特征，这是艺术创作必须满足的一个要求。

* * *

我们开始寻找制片人，帮助我们把《二体问题》拍摄成标准长度的正片。我当时认为，片子拍摄完成后最好先在小范围内试映。2009年4月，我回到巴黎，继续完成Chaire d’Excellence奖的项目。这时候，我的一个朋友、数学家皮埃尔·沙比哈（Pierre Schapira）为我介绍了一位有才华的年轻导演瑞恩·格拉夫斯（Reine Graves）。瑞恩做过时装模特，也执导过好几部立意新颖、风格大胆的短片（其中有一部还在巴黎的限制级电影节上赢得了帕索里尼奖）。在皮埃尔的安排下，我和瑞恩共进了午餐。席间，我提议我们俩合作拍摄一部介绍数学的短片，瑞恩欣然接受了我的提议。很显然，我们一拍即合。几个月之后，有人问她为什么接受我的提议，瑞恩回答说，在当今世界，人们的热情差不多消耗殆尽，而数学王国是尚能发掘出诚挚激情的为数不多的领域之一。

我们开始想各种各样的创意。我拿出几张以前拍摄的照片给瑞恩看，在这些照片上，我（用数字方式）在人体上绘制了一些数学公式的文身。瑞恩一看就非常喜欢，于是，我们决定把公式文身这个素材放到电影中。

文身这种艺术形式源自日本。我去过日本十几次（那时，费金夏天在京都大学任教，我去那里与他一起研究数学问题），日本文化让我深深着迷。为此，我和瑞恩跑到日本的电影院寻求灵感。在我们观

看的电影中，有一部名叫“忧国”，由日本著名作家三岛由纪夫（Yukio Mishima）根据自己的短篇小说改编，且由他本人执导并担纲主演。

这是一部黑白片，并不是很长，在具有典型日本能乐风格的简朴舞台上上演。电影中没有对白，但是选取了瓦格纳的歌剧《特里斯坦与伊索尔德》中的音乐作为背景音乐。电影中有两个角色，一个是皇家卫队的年轻军官竹山中尉，另一个是他的妻子玲子。这名军官的朋友发起了一场政变，结果却失败了。中尉接到将作乱者处死的命令，但他无法执行这条命令，因为这些作乱者都是他的好朋友。可是，他也无法违背天皇的命令。于是，他唯一的选择就是切腹自杀。

尽管这部电影的时长只有29分钟，但却深深地打动了我。我认为三岛由纪夫的电影创作方式力量感十足，毫不掩饰地直指问题的核心。人们可能不认同他的思想（事实上，在我看来，他对爱与死亡之间的微妙关系的认识缺乏感染力），但是作为电影创作者，他毫不妥协的态度赢得了我的尊重。

三岛由纪夫打破了电影的传统表现方式：这是一部无声电影，在各个“章节”之间有书面文字解说后续情节。这部电影非常适合舞台表演，演员的动作不多，但各个场景都经过精心编排。不过，让我为之心动的却是其中情感的无声宣泄。（当时，我还不知道三岛由纪夫本人也是切腹自杀的，与电影情节诡异地相似。）

这部电影引起了我强烈的共鸣，也许是因为我和瑞恩也想制作一部打破传统的电影，以一种全新的方式介绍数学。我觉得三岛由纪夫使用的电影框架与语言充满了美感，这正是我们苦苦追寻的目标，因此，我给瑞恩打了一个电话。

“我看了三岛由纪夫的电影，”我说，“真是太棒了。我们的电影也应该拍成那样。”

“好的，”她说，“那我们选择什么主题呢？”

突然之间，我的思路变得异常清晰，一连串想法脱口而出。

“一位数学家创建了爱的公式，”我说，“但他却发现这个公式是一柄双刃剑：它既可以用来行善，又可以用来作恶。他意识到这个公式必须妥善保管，以免落入坏人手中，于是他决定把它文到他深爱的女人身上。”

“非常好。你觉得电影的名字叫什么好呢？”

“嗯……叫《爱与数学之祭》，怎么样？”

就这样，我们确定了这部电影的创意。

在我们的设想中，这部电影就是一个寓言，告诉人们数学公式与诗歌、绘画和音乐一样，也富有美感。我们不奢望它能冲击观众的大脑，而是希望触及他们的直觉与本能；我们不奢望观众能够理解这些数学公式，而是希望让他们在第一时间去感受这些公式。我们认为，强调数学中人文与精神层面的内容，有助于激发观众的好奇心。

在人们看来，数学与自然科学总的说来是两个枯燥乏味的领域。但实际上，创建新的数学知识与艺术及音乐创作一样，是一个激情四射的求索过程，也是一种个性十足的体验。如果缺乏热情，没有奉献精神，是无法实现目标的。这是与未知世界的斗争，也是与自我的斗争，能激发你强烈的情感。而且，你发现数学公式可以触及你的灵魂，就像电影里的文身会深深嵌入人的皮肤一样。

在我们这部电影中，一位数学家发现了“爱的公式”。当然，所谓“爱的公式”，其实是在隐喻我们想要追求终极真理，想要洞察世界的一切。在现实世界中，我们必须勉强接受一知半解。但是，如果真

的有人能发现终极真理呢？如果终极真理真的可以用数学公式表现出来呢？我想，这个终极真理就是电影里的爱的公式。

亨利·戴维·梭罗说过一句很妙的话：

> 对于任何真理，如果想要用最明确、最优美的语句来表述它，就得借助数学语言。我们有可能对算术规则乃至道德哲学规则进行简化，用一个数学公式同时表示这两种内容。

即使数学公式并不足以表现世间万物，但总的来说，数学公式仍然是表现人类已知真理的最纯粹、适用面最广也是最经济的表达方式。它们不会人云亦云，而是忠实地向所有人传递永恒、珍贵的知识，而且，它们是一座座巍峨挺拔的现实之塔，所表达的都是人类必需的真理，引导着人类走过时空的征程。

亨利希·赫兹（Heinrich Hertz）对数学公式充满了敬畏："人们会情不自禁地认为这些数学公式是一种独立的存在，拥有灵性，比人类聪明，甚至比建立这些公式的人聪明。"赫兹证明了电磁波的存在，因此人们用他的名字来命名频率单位。

有这种感受的人远不止赫兹一人，数学界的大多数人都认为数学公式与数学思想存在于一个独立的世界之中。罗伯特·朗兰兹认为数学"常常以暗示的形式悄然而至，这说明数学的全部内容（而不仅仅是其中的基本概念）都独立于我们之外而存在。这样的认识很难理解，但是，如果专业数学研究者没有形成这种认识，就会寸步难行"。著名数学家尤里·曼宁（德林费尔德的导师）也有类似的感受，他说："虔诚谦恭、痴心不改的数学家发现（而不是创造），在柏拉图所谓的"思想世界"的某个地方，巍然矗立着一座气势雄伟的数学城堡。"

从这个意义上讲，伽罗瓦群是由这位法国天才发现的，而不是由他创建的。在他发现之前，这个概念已经存在于数学这个思想世界的魔幻花园中，等着人们去探索。即使伽罗瓦的那些论文丢失了，即使他没有因为这项发现而获得应有的荣誉，这些群也将会被其他人发现。

在人类辛勤耕耘的其他领域，情况则有所不同。如果乔布斯没有回到苹果公司，我们可能就不会用上iPod（苹果便携式多功能数字多媒体播放器）、iPhone（苹果智能手机）和iPad（苹果平板电脑）。也许苹果公司会完成其他的技术创新，但是我们没有理由期望其他人也能创造出跟乔布斯完全相同的产品。但是，数学真理则不同，它们是一种必然的存在。

希腊哲学家柏拉图首先提出，数学中的一项项内容与我们的理性活动没有任何联系，因此，数学概念与数学思想栖身的这个世界，通常被称为"柏拉图数学世界"。数学物理学家罗杰·彭罗斯（Roger Penrose）在他的专著《通往现实之路》（*The Road to Reality*）中宣称，柏拉图数学世界中的数学命题"都是客观真实的命题。如果人们说某个数学命题存在于柏拉图数学世界中，就意味着该命题是客观真实的。"同理，数学观念也"存在于柏拉图数学世界中，因为它们是客观的"。

同彭罗斯一样，我也认为柏拉图数学世界与物理世界及精神世界有所不同。比如，我们可以想一想费马大定理。彭罗斯在他的书中反问道："我们会认为在费马提出这个命题之前它就是一个客观真实的命题，还是认为该命题的真实性是个纯粹的文化问题，且取决于数学界的主观标准呢？"借助归谬法这个经受住了时间考验的传统证明工具，彭罗斯指出，如果引入主观解读，就会导致大量"明显荒谬"的命题，以此强调数学知识是独立于人类所有活动之外的客观存在。

库尔特·哥德尔直言不讳地赞成这个观点。哥德尔的研究成果，尤其是著名的“哥德尔不完全性定理”（Gödel’s incompleteness theory），从根本上改变了数学的逻辑。他认为数学概念“是客观现实，我们只能认知、描述，但却无法创建或改变这些客观现实”。换言之，“数学描述的是非感官现实，是一种独立存在，与人类的意识与意向无关。人类的意识只能认知这种非感官现实，而且这种认知有可能很不全面”。

柏拉图数学世界与物理现实也没有关联。例如，我们在第16章讨论过，规范场论这个工具最初是由数学家提出来的，他们没有参考任何物理知识。然而，事实证明，这些模型描述了自然界中的三个已知作用力（电磁力、弱作用力和强作用力）。这三种作用力分别对应三个具体的李群[循环群、SU(2)群和SU(3)群]，尽管也存在可对应所有李群的规范场论。与其他李群（不包括上述三个李群）相关的规范场论都具有明显的数学特征，而且人们尚未发现这些规范场论与现实世界存在任何联系。此外，我们还讨论过这些规范场论的超对称扩展结构。尽管人们没有在自然界中发现超对称性，而且自然界中很有可能并不存在超对称性，但是，我们依然可以利用数学工具来分析这些超对称扩展结构。维数不是4的类似模型，在时空中也具有数学意义。这种与物理现实没有任何直接联系，但是内涵丰富的数学理论有很多，简直不胜枚举。

罗杰·彭罗斯在其著作《意识的阴影》（*Shadows of the Mind*）中讨论了物理世界、精神世界与柏拉图数学世界三者之间的关系。这三个世界彼此独立，但又紧密地交织在一起。我们仍然无法彻底了解它们之间的联系，但显而易见的是，这三个世界都会对我们的生活产生深远的影响。不过，尽管我们已经认识到物理世界与精神世界对人类的重要意义，但仍有很多人根本不了解数学世界（对他们来说，这未尝不是一件幸事）。我相信，等到我们对这个隐藏的现实有所认识，并发掘出其尘封多年的能力时，产业革命留给我们这个社会的既定秩序就会发生改变。

在我看来，数学知识的客观性是产生无限可能的源泉，也是区别于人类其他行为的根本特性。我觉得，了解这个特性背后的秘密，有助于我们彻底了解物理现实、意识及两者之间的相互关系。换句话说，我们越接近柏拉图数学世界，我们了解周围世界以及我们在这个世界中所处位置的能力就越强。

值得庆幸的是，我们深入了解柏拉图数学世界，并在生活中对其加以应用的进程是不可阻挡的，其中一个非常重要的原因就是数学的内在民主性。对于物理世界和精神世界而言，不同的人在认知或解读其中的某些内容时可能会得出不同的结论，有的人甚至根本无法理解。但是，所有人对数学概念与方程式的认知都会得出相同的结论，而且数学给予人们的机会是均等的。没有人可以垄断数学知识，人们既不能宣布某个数学公式或数学思想是自己发明的，也不能为某个公式申请专利。比如，爱因斯坦不能为自己提出的公式$E=mc^2$注册专利。原因在于，如果这个公式是正确的，那么它所表示的是宇宙的某个永恒真理，因此不可能私有化，只能由大家共享。无论贫富、肤色与年龄，谁也不能把它从我们手中夺走。在这个世界上，再也没有其他任何事物能像数学那样深奥、典雅而又不属于某个人的了。

* * *

电影《爱与数学之祭》模仿三岛由纪夫电影的艺术风格，画面中心位置的装饰品是一幅挂在墙上的大件书法作品，显得非常朴实。在三岛由纪夫的电影中，该书法作品上书写的是shisei（真诚），因为那部电影的主题是真诚与荣誉。

而我们选择的电影主题是真理，因此我们计划在这件书法作品上写上“真理”。不过，我们不是用日语书写，而是用俄语。

“真理”一词在俄语中可用两个词来表示。其中更常见的一个词是“Pravda”，指与事实有关；另外一个词是“istina”，意为更深层次、

哲学意义上的真理。例如，“圆桌对称群是一个圆”这句话是“Pravda”，而朗兰兹纲领（在经过证明之后）就是“istina”。很明显，电影中的那位数学家为之献身的真理是“istina”。



在我们这部电影中，我们希望探讨数学知识的道德意义：一个非常重要的公式也有可能会产生负面作用，被居心叵测的人利用。我们以20世纪初的一群理论物理学家为例。这些物理学家一心想了解原子的结构，结果，在一场他们看来纯粹是高尚的科学探索活动中，他们无意间发现了原子能。原子能在为人类做出很多有益贡献的同时，也给人类带来了破坏与死亡。同样，我们在知识求索过程中发现的数学公式也有可能对人类造成伤害。尽管科学家拥有开展科学探索的自由，但是我认为他们也应该承担相应的责任，尽可能地避免自己发现的公式被居心叵测的人利用。在我们这部电影中，那位数学家宁愿放弃自己的生命，也要保护公式不落入坏人之手——文身是他能想到的既可以把公式隐藏好又可以保证公式不遗失的一个方法。

由于我从来没有文过身，因此我必须了解文身的各个程序。如今，人们可以利用机器来文身，但是在历史上（在日本），文身是用

一根竹棒制作出来的，耗时更长，也让人更痛苦。有人告诉我，日本现在可能还有使用这种古老技术的文身店，我们在电影中展现的正是这种古老的技术。



电影中要用到的“爱的公式”到底应该选择哪一个呢？这是一个非常重要的问题。这个公式必须足够复杂（毕竟，这是爱的公式），同时，它还应该具有美感，看到它人们便觉得赏心悦目。我们希望向观众表明，数学公式既有内在美，又有形式美。同时，我还希望选用我自己建立的公式。

经过艰苦的“海选”，我选择了下面这个公式：

$$\begin{aligned}\int_{CP^1} \omega F(qz, \overline{qz}) = &\sum_{m, \overline{m}=0}^{\infty} \int_{|z|<\varepsilon^{-1}} \omega_{z\overline{z}}\, z^m \, \overline{z}^{\overline{m}} dz d\overline{z} \cdot \frac{q^m \overline{q}^{\overline{m}}}{m! \, \overline{m}!} \partial_z^m \partial_{\overline{z}}^{\overline{m}} F \Big|_{z=0} \\ &+ q\overline{q} \sum_{m, \overline{m}=0}^{\infty} \frac{q^m \overline{q}^{\overline{m}}}{m! \, \overline{m}!} \partial_w^m \partial_{\overline{w}}^{\overline{m}} \omega_{w\overline{w}} \Big|_{w=0} \cdot \int_{|w|<q^{-1}\varepsilon^{-1}} F \omega^m \overline{\omega}^{\overline{m}} d\omega d\overline{\omega}.\end{aligned}$$

该公式选自我和我的两位朋友安德烈·罗瑟夫（Andrey Losev）、尼基塔·涅克拉索夫（Nikita Nekrasov）于2006年合作完成的论文“超越拓扑理论的瞬子第一篇”（Instantons Beyond Topoloical Theory I）。这篇论文长达100页，上述公式是论文中列出的公式（5.7）。

这个公式看上去令人生畏。如果我在电影中把这个公式写到黑板上，并解释其中的含义，那么大部分观众可能会立刻离场。但是，当它以文身的形式出现后，就会引起截然不同的反应。这个公式似乎真的可以触及观众的灵魂，大家都希望了解其中的含义。

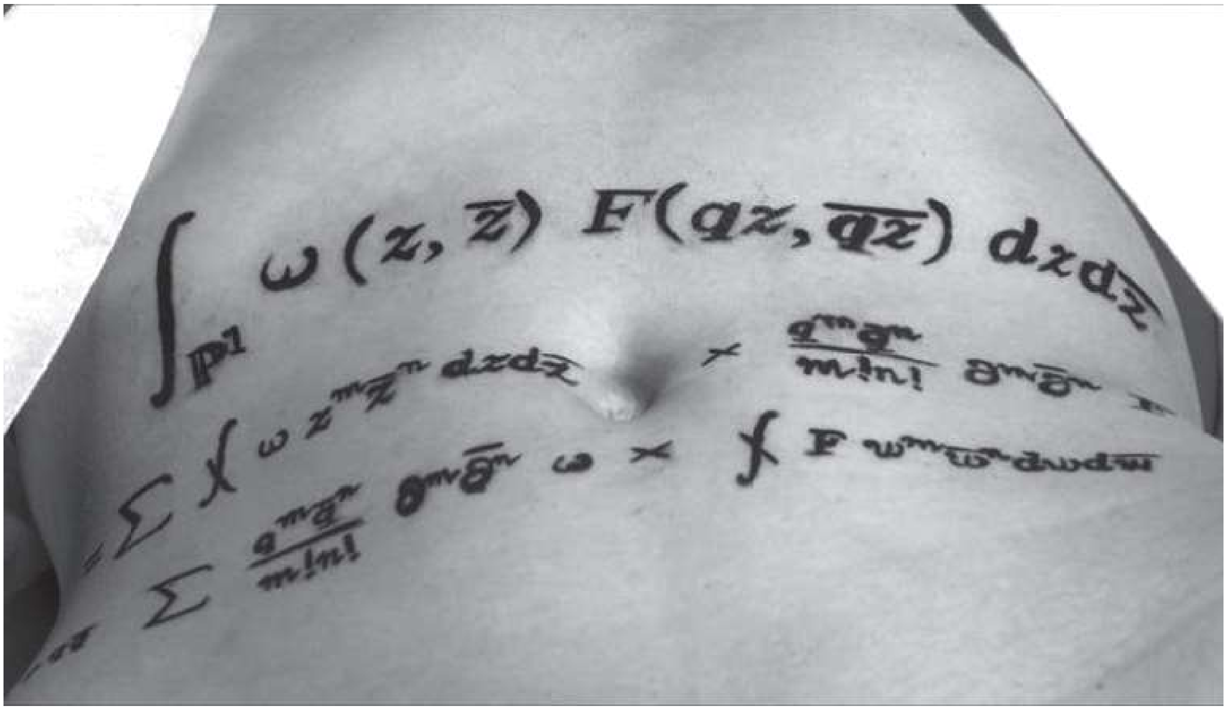
这个公式到底有什么含义呢？当时，我们写了一系列论文，讨论借助“瞬子”研究量子场论的新方法，这篇论文是该系列论文的第一篇。瞬子是有显著特点的量子场结构。尽管量子场论可以准确地描述基本粒子间的相互作用，但是无法准确地解释众多重要现象。例如，根据标准模型，质子和中子由三个不可分的夸克构成。在物理学中，这种现象被称为限制作用。但是，其作用原理一直没有合理的解释，很多物理学家相信瞬子是打开这道门的钥匙。不过，在传统的量子场论中，瞬子并不容易理解。

因此，我们提出了一个研究量子场论的新方法，以便更好地理解瞬子的作用。在研究其中一个理论时，我们采用了两种不同的方法去计算它的相关函数。结果，上述公式表明，这两个方法表现出令人吃惊的一致性。当时，我们并不知道这个公式很快就要在电影中扮演“爱的公式”这个角色。

我们的特效师欧丽安·吉劳德（Oriane Giraud）非常喜欢这个公式，但她觉得要是把这个公式制作成文身就太复杂了。于是，我简化了这个公式，最终在电影中它呈现为下图所示的样子（见下页）。

在电影中加入文身的镜头是为了表现数学研究中的激情。在制作文身时，这位数学家全神贯注，把整个世界都抛在脑后。对他而言，

这个公式就是他的生命的全部意义所在。



我们下了很大功夫才完成这组镜头的拍摄。全剧组约30个人通力合作，花了一整天时间，到接近午夜时才完成拍摄。我与扮演真理子的女演员凯伊肖恩·梅（Kayshonne May）真的感到身心俱疲。但是，整个剧组成员都欢欣鼓舞、情绪激动。

* * *

2010年4月，在巴黎自然科学与数学基金会的资助下，电影的首映式在麦克斯·林戴电影院（Max Linder Panorama Theater）举行。这是巴黎最好的电影院之一，首映式也非常成功。各类杂志开始刊登第一波影评，法国《世界报》评价《爱与数学之祭》是“一部极有震撼力的短片，非比寻常地用一种浪漫的眼光去观察数学家的世界”。《新科学家》也评论道：

> 这是一部非常优秀的电影……如果弗伦克尔的目的是让更多的人了解数学、学习数学，那么他已经如愿以偿了，因为这部电影极

有感染力。电影中的“爱的公式”，实际上是一个方程式的简化版，该方程式引自他于2006年发表的一篇题为“超越拓扑理论的瞬子第一篇”的量子场论论文。将其拍成电影之后，有机会看到（即便不能理解）这个公式的人可能会大大增加。

法国流行杂志Tangente Sup认为，这部电影“将激起那些认为数学与艺术及诗歌是从根本上对立的人的兴趣”。这篇文章还引用了赫尔夫·莱宁（Hervé Lehning）的一段话：

> 对称性与对偶性是爱德华·弗伦克尔数学研究中的重要内容。这些内容与朗兰兹纲领有关，目的是在数论与某些群之间建立联系。这个研究主题非常抽象，但它在实际生活中也有应用，比如密码学……如果说对偶性在爱德华·弗伦克尔的研究中具有如此重要的意义，我们不免会想到一个问题。在爱与数学之间，是否也像电影名字暗示的那样，存在某种对偶关系呢？他的答案非常明确，他认为数学研究的目的就是揭示爱的奥秘。

随后，这部电影在世界各地的电影节上映，其中包括加利福尼亚、巴黎、京都、马德里、圣芭芭拉、毕尔巴鄂、威尼斯……电影公开上映后，我得以观察“两种文化”之间的某些差异。我首先感受到的是文化冲击。在全世界范围内，能够完全理解我的数学研究的人很少，起初只有十几个人。其次，每个数学公式表现的都是一个客观真理，从本质上看，这个真理应该只有一种正确的解读，大家对我的数学研究成果的解读也是一个样。而我们这部电影的观众很多，有成千上万的人，他们都会以自己的方式去理解。

因此，我的理解是，观众必然是艺术创作的一个部分，艺术创作的最后成果也要接受他们的评判。创作者没有改变观众感知的特权，当然，我们在分享观点时也能充实自己，从中获益。

在电影中，我们借助艺术家的感性来讨论理性的数学，以期使这两种文化融为一体。在电影的开头，真理子给这位数学家写了一首情诗。而在电影的结尾，这位数学家在真理子的身上文了一个数学公式，这是他对那首情诗的回馈。因为在这位数学家的心中，这个公式表现的就是爱。公式可以承载情诗所表达的那种激情与感性，我们正是利用这一点来表现数学与诗歌之间的相似性。对于这位数学家而言，这个公式是他的创造性成果，是激情与想象力的产物，是一份爱的礼物，是他写给她的一封情书。大家还记得吧，年轻的伽罗瓦在死亡决斗的前夜写下了他的那些方程式。

但是，她又是谁呢？在我们臆想出来的那个神秘世界中，她就是数学真理的化身[这也是我们把她的名字定为“Mariko”（真理子）的原因，这个词在日语中是“真理”的意思。同时，这也是墙上那幅书法作品上有“istina”字样的原因]。那位数学家对她的爱慕之情代表着他对数学和真理的热爱，表示他愿意为数学、为真理奉献出自己的生命。但是她不能死，因为她身上有他文上的公式，因为她要抚养她与数学家的孩子，因为数学真理是不朽的真理。

* * *

数学可以被视为爱的语言吗？一些观众无法接受“爱的公式”这个概念。有的人在看完电影后对我说：“逻辑与感情有时候会相互排斥，所以我们才会说爱是盲目的。怎么可能有爱的公式呢？”的确，我们经常会觉得情感是不理性的（不过，认知科学家认为，这种非理性的某些方面，其实可以通过数学来描述）。因此，我也认为，我们无法通过公式来描述或解释爱。我讨论爱与数学的联系，并不表示爱可以与数学相提并论，而是要告诉大家数学的内涵远比我们想象的要丰富。至少，数学可以为我们的爱提供理论依据，让我们彼此之间的爱、对周围世界的爱更深刻，也更强烈。

诗人诺玛·法贝尔（Norma Farber）给我们留下了一句很美妙的诗：

不要让我在爱河里懈怠……

让我一次又一次地“触电”。

数学就是让我们“一次又一次地触电”的东西，原因在于数学具有某种精神力量，只不过这种力量隐藏得很深，人们几乎很少使用它。

爱因斯坦说：“每一个认真探索科学知识的人都相信，宇宙的法则中明显包含着某种精神力量，这种精神力量远胜于我们人类拥有的精神力量，在它面前，我们的能力显得十分有限。”牛顿说：“我觉得自己就像一个在海滩上玩耍的孩子，偶尔捡到一块光滑的鹅卵石或一枚美丽的贝壳就乐不可支，但我却没有发现我面前的真理海洋，它正等待着人们去探索与发现。”

我希望有朝一日，我们每个人都能发现隐藏在数学中的这个事实。这样的话，我们就可以把分歧抛在脑后，专心致志地研究可以把我们联系在一起的那些深奥的真理。我们将像在海边玩耍的孩子那样，在发现令人炫目的美、感受到甜蜜温馨的和谐之后惊叹不已，我们也将分享和共同珍藏数学之美。

结语

2012年1月，美国数学学会（AMS）与美国数学协会（MAA）联合年会邀请我去波士顿做2012年度的会议报告。从1896年起，约翰·诺尔曼、陈省身、迈克尔·阿蒂亚、拉乌尔·博特、罗伯特·朗兰兹、爱德华·威滕等伟大的数学家都曾应邀做过这样的报告。看着这份名单，再看看他们的报告主题，就好像在回顾数学的百年历史。因此，被邀请参加这样一项活动，我既感到荣幸，又深感忐忑不安。

波士顿的会议给我留下了美好回忆。我第一次到达洛根机场是在1989年9月，当时我要去哈佛大学报到。有一部著名的电影叫作“来自俄罗斯的爱情”（*From Russia with Math*），不过，我拥有的不是爱情，而是对数学抱有的一片痴情。那时候，我21岁，懵懵懂懂，从来没有考虑过我的未来。三个月之后，我再次来到洛根机场，送我的导师鲍里斯·费金回莫斯科。在经历了一段动荡岁月的洗礼之后，我变得成熟多了，开始想我什么时候能再见到他。不过，我们在数学上的合作，还有我们的友谊，并没有因此中断，反而有所发展。

我在哈佛大学待的时间比预计的要长。第二年，我获得了博士学位，并进入哈佛学会（Harvard Society of Fellows），在学会中的任期结束前又成为哈佛的副教授。5年后，我又一次来到洛根机场，迎接前来美国定居的父母及妹妹一家。

从此以后，他们就居住在波士顿地区。1997年，由于加州大学伯克利分校的盛情邀请让我无法拒绝，我离开了波士顿。

如今，我仍然会定期前往波士顿探视家人。我父母的家距离联合年会的会址海因斯会议中心只有几个街区，于是他们前往会场，第一

次在现场观看了我参加学术活动的情景。可以与家人一起参加这次活动，对我而言的确是一个非常好的礼物。

这次联合会议有7 000多人报名参加，是一次盛况空前的会议。我的报告被安排在一个大会议厅里进行，有很多人慕名而来，我的父母、妹妹和外甥女坐在第一排。我在报告中介绍了我与罗伯特·朗兰兹及吴宝珠（Ngô Bao Chău）不久前合作完成的研究成果，我们已经合作了三年，希望可以进一步拓展朗兰兹纲领。

“如果我们把朗兰兹纲领拍成电影，大家觉得情节会是怎样的？”我问现场的观众，“剧作家肯定会告诉你，我们的电影必须回答以下问题：电影讲述了什么问题？有哪些人物？故事主线怎么安排？有哪些矛盾？这些矛盾应当如何解决？”

观众们都笑了。接着，我又介绍了安德烈·韦伊和他的“罗塞塔石碑”。我们在数学王国的各个岛屿间穿梭往来，探索它们之间的神秘联系。

我每摁一次遥控器的按键，4个大屏幕就会同时播放下一张幻灯片。这一张张幻灯片，记载着我们在永无止境的知识求索历程中取得的一个个小进展。我们思考的是真理与美的永恒问题。我们对数学这个神秘的被遗忘的大陆了解得越深入，就越能深刻地体会到我们对它知之甚少，还有更加广阔的空间等待我们去探索。我们前方的征程很漫长，需要我们坚持不懈的努力和持久的热爱。

致谢

感谢美国国防部高级研究计划局和美国国家科学基金会对本书中所涉及的某些研究的支持。我在撰写本书的时候，同时在加州大学伯克利分校的米勒基础科学研究所担任“米勒”教授。

在本书编辑出版的过程中，柏修斯出版集团的编辑凯勒尔及项目编辑梅丽莎·维罗内西给予了我专业的指导，在此向他们表示感谢。

在撰写本书的过程中，与萨拉·伯什特尔、罗伯特·布雷泽尔、戴维·埃森巴德、马克·杰拉尔德、真子·金、苏珊·拉比纳、萨沙·瑞斯金、费利波特·斯高、玛吉特·施瓦布、埃里克·温斯坦及戴维·叶兹等人富有成效的讨论，让我获益匪浅。

埃里克斯·弗利兰、本·克拉斯、克劳德·莱韦斯克、凯万·马沙耶科与柯琳·特朗等人在不同阶段阅读了本书的部分内容，并给我提出了有益的建议。感谢安德烈·扬帮我拍摄了第15章“杯子游戏”的照片。

托马斯·法贝尔为我提供了很多深刻的专业性建议，玛丽·莱维克在读完我的手稿之后，提出了大量探究性的问题，帮助我改进了很多地方的表述，在此要特别感谢他们。我的父亲弗拉基米尔·弗伦克尔多次阅读了我的书稿，并给我提出了非常有价值的意见。

在书中介绍探索数学的征程时，我已经对我的多位老师以及帮助过我的其他人表达了谢意，在这里我再次向他们表示感谢。

最后，我要感谢我的父母利迪娅·弗伦克尔和弗拉基米尔·弗伦克尔。没有他们的爱和支持，我不可能完成此书。我要把本书献给他

们。